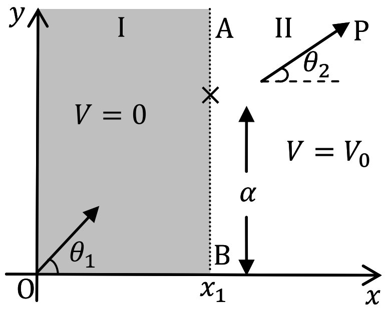
A szélsőértékelv **(Összpontszám: 10)**

A Szélsőértékelv a mechanikában

Tekintsünk egy vízszintes, súrlódásmentes $x-y$ síkot (1. ábra). A sík az $x = x_1$ egyenlettel megadott AB egyenessel két, I és II jelű tartományra van osztva. Egy m tömegű, pontszerű test helyzeti energiája az I-es tartományban $V = 0$, míg a II-es tartományban $V = V_0$. A részecskét az O origóból v_1 sebességgel indítjuk el egy, az x-tengellyel θ_1 szöget bezáró egyenes mentén. A II-es tartományban lévő P pontot v_2 sebességgel éri el egy, az x-tengellyel θ_2 szöget bezáró egyenes mentén. A gravitációt és a relativisztikus hatásokat az egész T-2 feladatban (minden részben) hanyagold el!



1. **ábra**

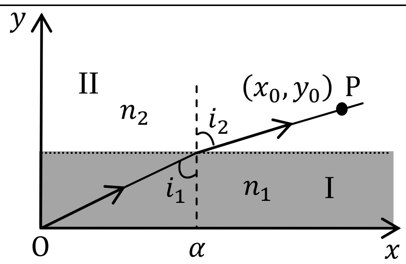
A1	Fejezd ki v_2-t m, v_1 és V_0 segítségével!	**0.2**
A2	Fejezd ki v_2-t v_1, θ_1 és θ_2 segítségével!	**0.3**

Definiálunk egy hatásnak nevezett mennyiséget: $A = m\int v(s)\mathrm{d}s$, ahol d$s$ a $v(s)$ sebességgel mozgó m tömegű részecske infinitezimálisán kicsi elmozdulása a pályája mentén. Az integrálást a pálya vonala mentén kell végezni. Példaként, ha egy részecske konstans v sebességgel mozog egy R sugarú körpályán, akkor az A hatás egy fordulat alatt $2\pi mRv$ lesz. Ha a részecske E energiája állandó, akkor megmutatható, hogy két rögzített végpont között az összes lehetséges pálya közül a részecske azon a pályán fog mozogni, amelyen kiszámítva az A hatásnak szélsőértéke (minimuma vagy maximuma) van. Történeti okokból ezt a legkisebb hatás elvének hívják (Principle of Least Action, PLA).

A3	A PLA-ból következik, hogy ha egy részecske olyan tartományban mozog, ahol a helyzeti energia állandó, a pályája a két rögzített pont közötti egyenes szakasz lesz. Legyenek az 1. ábrán látható O és P rögzített pontok koordinátái $(0,0)$, illetve (x_0, y_0), és annak a határpontnak a koordinátái, ahol a részecske átmegy az I-es tartományból a II-esbe, (x_1, α). Fontos, hogy x_1 értéke rögzített, és a hatás csak az α koordináta függvénye. Fejezd ki az $A(\alpha)$ hatást! A legkisebb hatás elve (PLA) alapján keress kapcsolatot a v_1/v_2 hányados és a fenti koordináták között!	**1.0**

B Szélsőértékelv az optikában

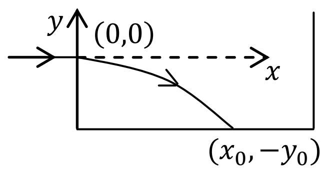
Egy fénysugár az n_1 törésmutatójú I-es közegből az n_2 törésmutatójú II-es közegbe lép át. A két közeget egy x-tengellyel párhuzamos egyenes választja el. A fénysugár az y-tengellyel az I-es közegben i_1, a II-es közegben i_2 szöget zár be (2. ábra). A fénysugár útját egy másik szélsőértékelv, a legkisebb idő elvét megfogalmazó Fermat-elv segítségével kapjuk meg.



2. ábra

B1	Az elv azt mondja ki, hogy két rögzített pont között a fénysugár olyan pályán halad, amelyen a két pont közötti út megtételéhez szükséges időnek szélsőértéke van. Vezesd le a $\sin i_1$ és $\sin i_2$ közötti összefüggést a Fermat-elv alapján!	**0.5**

A 3. ábrán egy lézersugár vázlatos rajza látható, amikor vízszintesen belép egy cukoroldatba, melyben a cukorkoncentráció csökken a magassággal. Ennek következtében a törésmutató is csökken a magassággal.



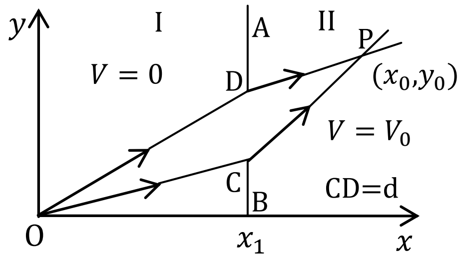
3. ábra: Cukoroldat edény

B2	Tegyük fel, hogy a $n(y)$ törésmutató csak y-tól függ. A B1 részben kapott összefüggés segítségével fejezd ki a fénysugár pályájának $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ meredekségét az n_0 és $n(y)$ törésmutatók függvényében, ahol n_0 a törésmutató értéke az $y = 0$ helyen.	**1.5**

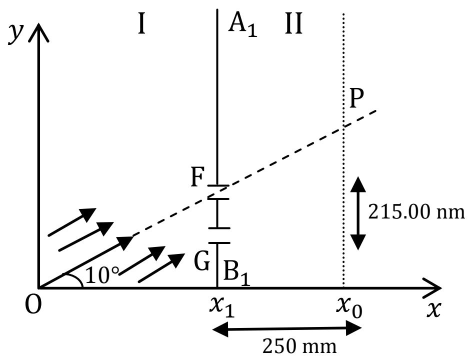
B3	A lézersugár a (0,0) origóban vízszintesen lép be a cukoroldatba az edény aljához viszonyítva y_0 magasságban, ahogy az a 3. ábrán látszik. Legyen $n(y) = n_0 - ky$, ahol n_0 és k pozitív állandók. Fejezd ki x-et y és a lézersugár pályáját meghatározó többi mennyiség függvényében! Felhasználhatod, hogy: $\int \sec\theta d\theta = \ln(\sec\theta + \tan\theta) +$ állandó, ahol $\sec\theta = 1/\cos\theta$, vagy: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) +$ állandó	**1.2**
B4	Határozd meg azt az x_0 értéket, ahol a fénysugár eléri az edény alját! Legyen: $y_0 = 10.0$ cm, $n_0 = 1.50$, $k = 0.050\ \mathrm{cm}^{-1}$ (1 cm = 10^{-2} m).	**0.8**

C A szélsőértékelv és az anyag hullámtermészete

Most a legkisebb hatás elve (PLA) és a mozgó részecske hullámtermészetének kapcsolatát fogjuk tanulmányozni. Ehhez azt feltételezzük, hogy az O-ból P-be haladó részecske minden lehetséges pályát befut, és mi azt a pályát keressük meg, amelyen az interferáló de Broglie hullámok erősítik egymást.

C1	A részecske egy infinitezimális Δs távolsággal elmozdul a pályáján. Fejezd ki a de Broglie hullám $\Delta\varphi$ fázisváltozását a hatás ΔA megváltozásával és a Planck-állandóval!	**0.6**
C2	Tekintsük újra az A rész feladatát, ahol a részecske O-ból P-be mozog (4. ábra). Tegyünk egy átlátszatlan lemezt a két tartomány közti AB határvonalra. Ezen egy kicsiny, d szélességű CD nyílás van, melyre teljesül, hogy $d \ll (x_0 - x_1)$ és $d \ll x_1$. Vegyük fel az OCP és ODP szélső pályákat, úgy, hogy OCP az A részben tárgyalt klasszikus pályán legyen. Határozd meg első rendben a két pálya közötti $\Delta\varphi_{CD}$ fáziskülönbséget!  **4. ábra**	**1.2**

D Anyaghullám interferencia



5. ábra

Tekintsünk egy elektronágyút O-ban, amely egy párhuzamosított elektronnyalábot bocsát ki a keskeny F rés irányába, amely az $x = x_1$ helyen lévő A_1B_1 átlátszatlan elválasztófalon úgy helyezkedik el, hogy OFP egy egyenesen legyen. P egy pont az $x = x_0$ helyen lévő ernyőn (5. ábra). A sebesség az I-es tartományban $v_1 = 2.0000 \times 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, és $\theta = 10.0000^\circ$. A II-es tartományban olyan a potenciál, hogy a sebesség $v_2 = 1.9900 \times 10^7\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. A $x_0 - x_1$ távolság 250.00 mm (1mm = 10^{-3}m). Az elektron-elektron kölcsönhatást hanyagold el.

D1	Számítsd ki az U_1 gyorsítófeszültséget, ha O-ban az elektronokat nyugalmi helyzetből gyorsítjuk fel!	**0.3**
D2	Az A_1B_1 elválasztófalon egy ugyanolyan G rést is létrehozunk az F rés alatt 215.00 nm (1nm = 10^{-9}m) távolságra (5. ábra). Az F és G réseken át a P pontba érkező de Broglie hullámok fáziskülönbsége $2\pi\beta$. Számítsd ki β értékét!	**0.8**
D3	Mekkora az a P-től mért legkisebb Δy távolság, ahol nulla (zéró) elektron becsapódása várható az ernyőn? [Figyelem! Hasznos lehet a $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \sin\theta + \Delta\theta\cos\theta$ közelítés.]	**1.2**
D4	A sugár négyzetes keresztmetszete 500nm × 500nm, és a mérési összeállítás hossza 2 m. Mekkora az a minimális I_{min} fluxussűrűség (elektron darabszám/egységnyi merőleges felület/egységnyi idő), amely esetében egy adott időpillanatban átlagosan legalább egy elektron található a mérési összeállításban?	**0.4**