

Hidrogén és galaxisok (10 pont)

E probléma célja a galaxisok sajátos fizikájának, például dinamikájának és szerkezetének tanulmányozása. Konkrétan elmagyarázzuk, hogyan lehet galaxisunk tömegeloszlását a galaxis belsejéből mérni. Ehhez a hidrogénre, a galaxisok fő alkotóelemére fogunk összpontosítani.

A probléma során kizárólag a $\hbar$ jelölést fogjuk használni, ami $\hbar = h/2\pi$.

A. rész - Bevezetés

Bohr-modell

Feltesszük, hogy a hidrogénatom egy nemrelativisztikus elektronból áll, amelynek tömege m_e , és egy rögzített proton körül kering. Ebben a részben mindenütt feltételezzük, hogy az elektron körpályán kering.

A.1 Határozd meg az elektron v sebességét egy r sugarú körpályán! 0.2pt

A Bohr-modellben feltételezzük, hogy az elektron impulzusmomentumának L nagysága kvantált, $L = n\hbar$, ahol $n > 0$ egész szám. Legyen továbbá $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.27 \times 10^{-3}$ (finomszerkezeti állandó).

A.2 Mutasd meg, hogy a kvantált pályasugarakat az $r_n = n^2 r_1$ képlet adja meg, ahol r_1 a Bohr-sugár! Fejezd ki a r_1 sugarat az α , m_e , c és $\hbar$ mennyiségekkel és számítsd ki a számértékét 3 jegy pontossággal! Határozd meg az r_1 sugarú pályához tartozó v_1 elektronsebességet az α és c segítségével! 0.5pt

A.3 Add meg az r_n sugarú pályán keringő elektron E_n mechanikai energiáját az e , ϵ_0 , r_1 és n mennyiségek függvényében! Add meg az alapállapot E_1 energiát az α , m_e és c mennyiségekkel, és számítsd ki a számértékét eV-ban! 0.5pt

Hidrogén finom- és hiperfinom szerkezete

A hidrogénatom az elektron spinjének nagyon ritka, spontán átfordulásakor, átlagosan atomonként 10 millió évente egyszer, kibocsát egy fotont. Ez a fotonkibocsátás a világegyetemben a hidrogén nyomjelzőjeként szolgál, és ezért alapvető fontosságú az asztrofizikában. Ezért a fotonkibocsátásért felelős elektronátmenetet két lépésben tanulmányozzuk.

Először az elektron spinje valamint az elektron és proton relatív mozgása közti kölcsönhatást tanulmányozzuk. Az elektron vonatkoztatási rendszerében a proton kering az elektron körül r_1 távolságban. Ez $\vec{B}_1$ mágneses teret hoz létre.

A.4 Határozd meg a $\vec{B}_1$ mágneses tér B_1 nagyságát az elektron helyén a μ_0 , e , α , c és r_1 mennyiségekkel kifejezve! 0.5pt

Másodszor, az elektron spinje $\vec{\mathcal{M}}_s$ mágneses momentumot hoz létre, aminek nagysága nagyjából $\mathcal{M}_s = \frac{e}{m_e} \hbar$. A finomszerkezet (F) azzal a ΔE_F energiakülönbséggel függ össze, amely az $\vec{\mathcal{M}}_s$ mágneses momentumú elektron $\vec{B}_1$ mágneses térrel párhuzamos beállása és az $\vec{\mathcal{M}}_s$ mágneses momentumú elektron $\vec{B}_1$ térrel ellentétes irányú beállása között van. Hasonlóképpen a hiperfinom szerkezet (HF) azzal a ΔE_{HF} energiakülönbséggel függ össze, amely az elektron és a proton párhuzamos illetve ellentétes irányú mágneses momentumai között jön létre. Ismert, hogy jó közelítéssel $\Delta E_{HF} \approx 3.72 \frac{m_e}{m_p} \Delta E_F$, ahol m_p

a proton tömege.

- A.5** Fejezd ki ΔE_F -et α és E_1 függvényében! 0.5pt
Add meg a hiperfinom szerkezet két állapota közötti átmenet során kibocsátott foton λ_{HF} hullámhosszát analitikusan valamint numerikusan, két jegy pontossággal!

B. rész - Galaxisok forgási görbéi

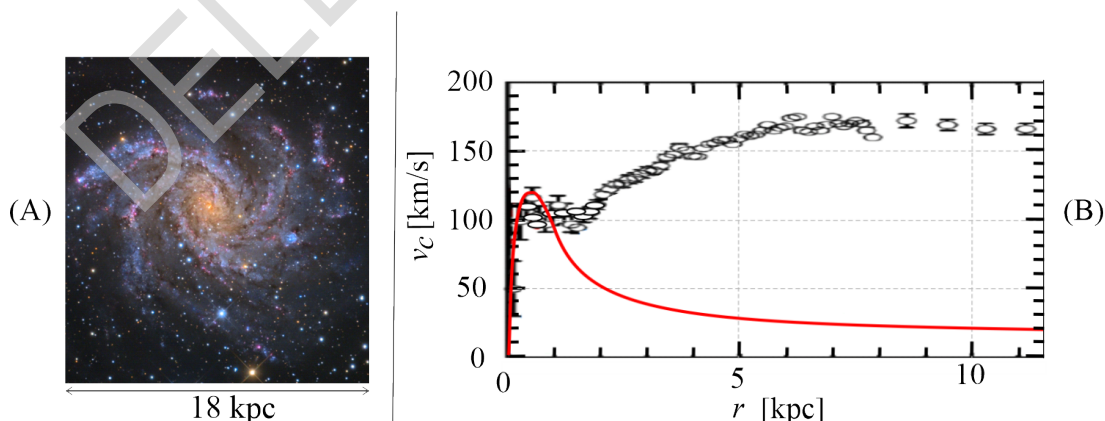
Adatok

- Kiloparsec: $1 \text{ kpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ m}$
- Naptömeg : $1 M_\odot = 1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$

Tekintsünk egy gömb alakú galaxist, amelynek középpontja a fix O pont! Egy tetszőleges P pontban $\rho = \rho(P)$ a sűrűség (tömeg per térfogat), $\varphi = \varphi(P)$ pedig a gravitációs potenciál (egységnyi tömegre eső gravitációs potenciális energia). Mind a ρ , mind a φ csak az $r = \|\vec{OP}\|$ távolság függvénye. A φ gravitációs potenciálban a P pontban levő m tömeg mozgása egy O -n átmenő síkra korlátozódik.

- B.1** Határozd meg a P pontban levő, körpályán keringő tömegpont v_c sebességét 0.2pt
az r és a $\frac{d\varphi}{dr}$ függvényében!

Az 1(A) ábra az NGC 6946 spirálgalaxisnak az elektromágneses spektrum látható tartományában felvett képét mutatja (mely az arizonai Mount Lemmon Sky Centerben található 0.8m Schulman Teleszkóppal készült). Az 1(B) ábrán a kis ellipszisek a v_c sebességek méréssel kapott értékeit mutatják ebben a galaxisban. A központi tartományt ($r < 1 \text{ kpc}$) galaxismagnak nevezzük. Ebben a tartományban a tömegeloszlás nagyjából homogén. A piros görbe a v_c függvény elméleti alakja, feltételezve, hogy a galaxismag tömegeloszlása homogén, azon kívül pedig a Kepler-féle $\varphi(r) = -\beta/r$ gravitációs potenciál érvényes (itt $\beta > 0$), azaz a galaxis teljes tömege a magban koncentrálódik.



1. ábra: NGC 6946 galaxis: a galaxis képe (A) és forgási görbéje (B).

- B.2** Az 1. ábra (B) piros forgási görbéje alapján határozd meg az NGC 6946 galaxis magjának M_b tömegét naptömeg egységben! 0.5pt

A kepleri modell és a kísérleti adatok összehasonlítása alapján a csillagászok biztosak abban, hogy a

tömeg egy része láthatatlan a képen. Ezért feltételezzük, hogy a galaxis tényleges tömegsűrűségét a következő képlet adja meg:

$$\rho_m(r) = \frac{C_m}{r_m^2 + r^2} \quad (1)$$

ahol $C_m > 0$ és $r_m > 0$ konstansok.

B.3 Mutasd meg, hogy az 1. egyenletben szereplő tömegsűrűségnek megfelelő 1.8pt

$v_{c,m}(r)$ sebességprofil felírható $v_{c,m}(r) = \sqrt{k_1 - \frac{k_2 \cdot \arctan(\frac{r}{r_m})}{r}}$ alakban! Fejezd ki a k_1 és a k_2 paramétereket a C_m , a r_m és a G mennyiségekkel!

(Segítség: $\int_0^r \frac{x^2}{a^2 + x^2} dx = r - a \arctan(r/a)$, és: $\arctan(x) \approx x - x^3/3$, ha $x \ll 1$.)

Hozd egyszerűbb alakra a $v_{c,m}(r)$ függvényt az $r \ll r_m$ valamint az $r \gg r_m$ esetben!

Mutasd meg, hogy ha $r \gg r_m$, akkor az 1. egyenlet által megadott tömegeloszlás esetén az r sugarú gömbön belüli teljes $M_m(r)$ tömeg egyszerűsödik, és csak a C_m és az r függvénye!

Becsüld meg az 1. ábra (A) képen látható NGC 6946 galaxis tényleges tömegét.

C. rész - Tömegeloszlás galaxisunkban

Spirálgalaxisok esetében a szférikus modellben szereplő 1. egyenlet módosul, és általában úgy tekintjük, hogy a gravitációs potenciált a $\varphi_G(r, z) = \varphi_0 \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \exp\left[-\left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right]$ függvény adja meg, ahol z a galaktikus síktól ($z = 0$ sík) mért távolság, $r < r_0$ most a tengelytől mért távolság, és $\varphi_0 > 0$ egy meghatározandó konstans. Az r_0 és z_0 mennyiségek konstans paraméterek.

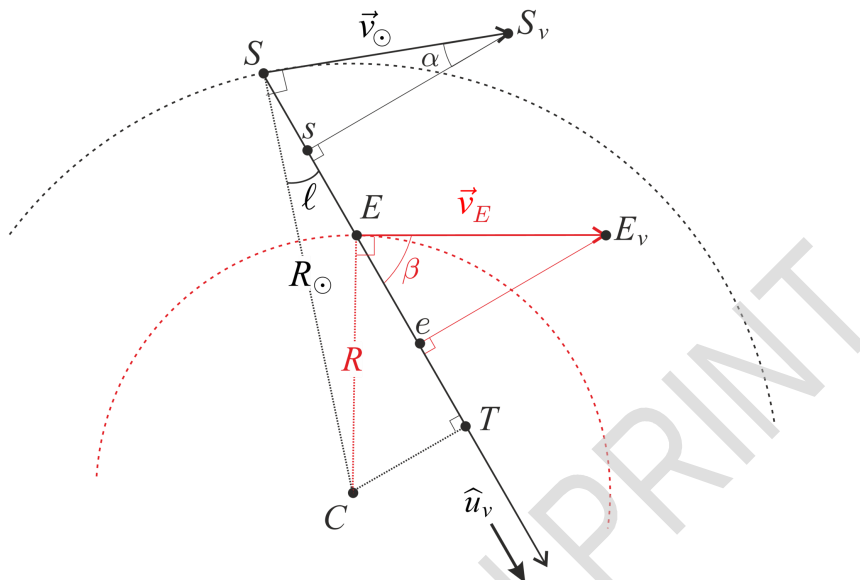
C.1 Feltételezve, hogy r állandó, határozd meg egy m tömegpont függőleges irányú, z változóra felírt mozgásegyenletét! Mutasd meg, hogy ha $r < r_0$, akkor a galaktikus sík stabil egyensúlyi helyzetű, megadva az egyensúlyi helyzet körüli kis oszcillációk ω_0 körfrekvenciáját! 0.5pt

Innentől kezdve csak a $z = 0$ síkban dolgozunk.

C.2 Határozd meg azt a tartományt, akár $r \gg r_m$ -et, akár $r \ll r_m$ -et, amelyben az 1. egyenlet modellje visszaadja a $\varphi_G(r, 0)$ alakú potenciált a φ_0 alkalmas megválasztásával! 0.6pt
Ebben a tartományban a $v_c(r)$ már nem függ a r -től. Fejezd ki a φ_0 mennyiséggel!

Ezért a galaxis magján kívül a sebesség v_c nagysága nem függ a galaxis középpontjától mért távolságtól. Ezt a tényt fogjuk felhasználni arra, hogy a galaxis tömegeloszlását a galaxis belsejében levő megfigyelési pontból mérjük, ahogy a csillagászok is teszik saját galaxisunkban.

Ezekben a csillagászati megfigyelésekben szereplő galaktikus objektumok, például csillagok, ködök elsősorban hidrogénből állnak, és feltételezzük, hogy a galaxismagon kívül a galaxis C középpontja körül körpályán mozognak. Jelölje S a Nap(rendszer)ünk helyét a galaxisunkban, és legyen E egy adott galaktikus objektum, ami a hidrogén spektrumában sugároz. Tekintsük a galaktikus síkban levő SE megfigyelési egyenest, melynek irányát az $\hat{u}_v$ egységvektor adja meg (lásd a 2. ábrát).

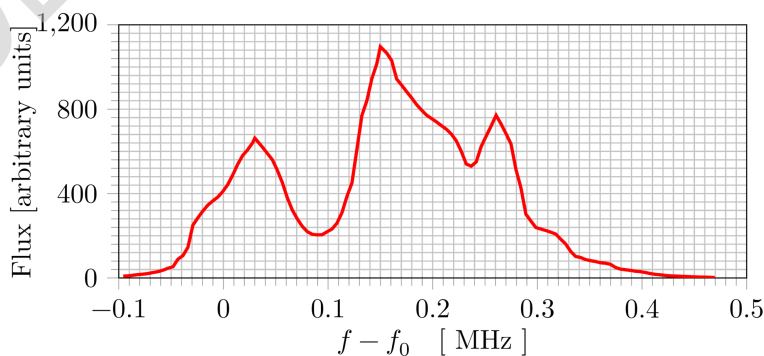


2. ábra: A mérés geometriája

Jelölje ℓ a galaktikus hosszúsági fokot, amely az SC és SE félegyeneselek közötti szög. A Nap sebességét a $R_\odot = 8.00 \text{ kpc}$ sugarú körpályáján a $\vec{v}_\odot$ jelöli. Az E galaktikus objektum egy másik, R sugarú körpályán $\vec{v}_E$ sebességgel kering. A korábban vizsgált 21 cm -es spektrumvonalra vonatkozó Doppler-effektust felhasználva megkaphatjuk az E forrásnak az S Naphoz képesti $v_{rE/S}$ relatív radiális sebességét, ami a $\vec{v}_E - \vec{v}_\odot$ vetülete a megfigyelési egyenesre,

C.3 Határozd meg a $v_{rE/S}$ radiális relatív sebességet az ℓ , R , $R_\odot$ és $v_\odot$ mennyiségekkel kifejezve! Ezután fejezd ki R -et az $R_\odot$, $v_\odot$, ℓ és $v_{rE/S}$ mennyiségekkel! 0.7pt

Rádiótávcsővel megfigyeléseket végzünk galaxisunk síkjában az $\ell = 30^\circ$ galaktikus hosszúsági fok irányában. Az alkalmazott frekvenciasáv tartalmazza a 21 cm hullámhosszú spektrumvonalat, amelynek frekvenciája $f_0 = 1.42 \text{ GHz}$. A megfigyelés eredményét a 3. ábra mutatja.



3. ábra: Elektromágneses jel a frekvenciaeltolódás függvényében, az EU-HOU RadioAstronomy segítségével az $\ell = 30^\circ$ galaktikus hosszúsági fokban, rádiófrekvenciás tartományban mérve.

C.4 A mi galaxisunkban a $v_0 = 220 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Határozd meg a 3. ábrán megfigyelt 3 forrás relatív radiális sebességét (3 értékes jegyre) valamint a galaktikus közép-ponttól mért távolságukat (2 értékes jegyre)! A távolságokat az R_0 többszöröseként add meg!

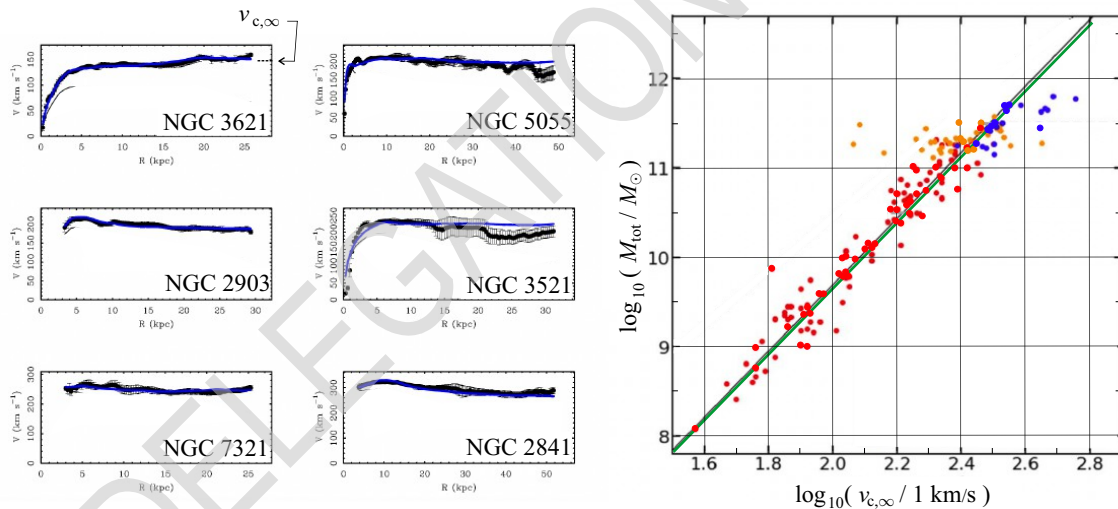
0.6pt

C.5 A válaszlapon, a galaxisunk felülnézeti rajzán jelöld be a 3. ábrán megfigyelt 3 források helyzetét! Mire lehet következtetni ℓ változtatásával megismételt mérések segítségével?

0.6pt

D. rész - Tully-Fisher reláció és a MOND-elmélet

Az NGC 6946 galaxis 1. ábrán látható, kívül (nagy sugaraknál) ellaposodó sebességgörbéje a spirálgalaxisok általános tulajdonsága, amint az a 4. ábrán (balra) is látható. Az egyes galaxisok M_{tot} mért össztömegét a $v_{c,\infty}$ külső állandó sebesség függvényében ábrázolva érdekes korrelációt kapunk, amit Tully-Fischer összefüggésnek nevezünk, lásd a 4. ábrát (jobbra).



4. ábra. Balra: Tipikus spirálgalaxisok forgási görbéi - Jobbra: $\log_{10}(M_{\text{tot}})$ a $\log_{10}(v_{c,\infty})$ függvényében lineáris skálán. A színes pontok különböző galaxisoknak és különböző felméréseknek felelnek meg. A zöld vonal a Tully-Fischer reláció, ami nagyon jól egybeesik az adatokra legjobban illeszkedő fekete egyenessel.

D.1 Feltételezve, hogy a galaxis R sugara független a galaxis tömegétől, mutasd meg, hogy az 1. egyenletre vezető modell (B. rész) az $M_{\text{tot}} = \eta v_{c,\infty}^\gamma$ formájú összefüggést adja, alkalmas γ és η paraméterekkel. Hasonlítsd össze a kapott kifejezést a Tully Fischer-relációval úgy, hogy az ábra alapján kiszámold γ_{TF} értékét.

0.4pt

A rendkívül alacsony, $a_0 = 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ nagyságrendű gyorsulások esetén a MODified Newtonian Dynamics (MOND) elmélet szerint Newton második törvényét a $\vec{F} = m\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)\vec{a}$ formában módosíthatjuk, ahol

$a = \|\vec{a}\|$ a gyorsulás nagysága, és a μ függvényt $\mu(x) = \frac{x}{1+x}$ képlet definiálja.

- D.2** Az 1. ábrán az NGC 6946-ra vonatkozó adatok felhasználásával becsüld meg a newtoni fizika törvényeinek felhasználásával az NGC 6946 galaxis külső részében lévő tömeg gyorsulásának a_m nagyságát! 0.2pt

- D.3** Legyen m egy tömeg, amely egy r sugarú körpályán kering $v_{c,\infty}$ sebességgel egy M rögzített tömeg gravitációs terében. A MOND-elméleten belül, feltételezve, hogy $a \ll a_0$, határozd meg a Tully-Fischer-exponenst! Az NGC 6946 galaxis adataiból és/vagy a Tully-Fischer törvény segítségével számold ki a_0 -t, és mutasd meg, hogy a MOND elméletben adott paraméterrel azonos nagyságrendű! 0.8pt

- D.4** A MOND elmélet keretein belül határozd meg egy M tömegű, R_b sugarú homogén gömb gravitációs terében a $v_c(r)$ forgási görbét az r minden értékére, a releváns esetek szétválasztásával! 0.9pt