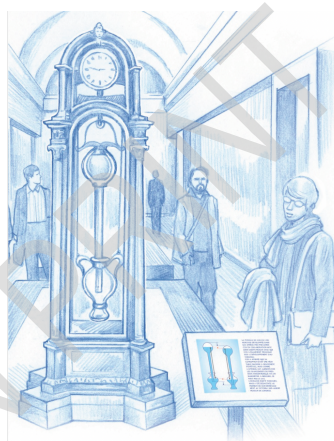


Cox-féle óra (10 pont)

1765-ben James Cox brit órásmeister kifejlesztett egy olyan órát, amely a működéséhez szükséges összes energiát a légköri nyomás ingadozásából nyeri. Cox órájában két higanyt tartalmazó edényt használt. A légköri nyomás változásának hatására a higany az edények közt áramlott, a két edény pedig egymáshoz képest elmozdult. Ez a mozgás szolgáltat energiaforrásként a tényleges óra számára.

Az alábbiakban az óra energiaforrását fogjuk vizsgálni. Mindvégig élünk az alábbi feltételezésekkel:

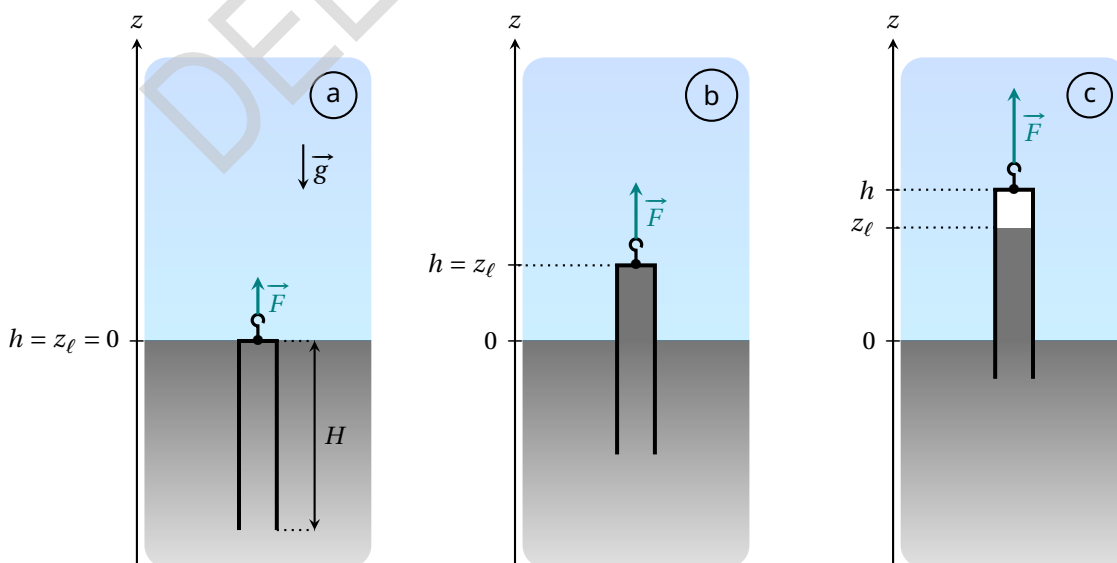
- a Föld nehézségi erőtere homogén: $\vec{g} = -g \vec{u}_z$, ahol $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ és $\vec{u}_z$ a z irányú egységvektor.
- minden folyadék összenyomhatatlan, és sűrűségüket ρ jelöli;
- nem vesszük figyelembe a felületi feszültség hatását;
- a légköri nyomás magasságfüggését elhanyagoljuk;
- a T_a környezeti hőmérséklet állandó, minden folyamat izotermikus.



1. ábra. Cox órájának művészi ábrázolása ¹

A. rész - Vízbe merített cső kiemelése

Adott egy nagy kiterjedésű vízzel telt kád, amelyben a víz a $z \leq 0$ félvégteles teret tölti ki. A fölötté lévő levegő atmoszférikus nyomása $P_a = P_0$. Vegyünk egy hengeres, függőleges helyzetű csövet, amelynek hossza $H = 1 \text{ m}$, keresztmetszete $S = 10 \text{ cm}^2$ és tömege $m = 0.5 \text{ kg}$. A cső belemerül a fürdőbe. A csőnek csak az alsó vége nyitott, felső vége zárt. Jelölje h a cső tetejének vízfelszín feletti magasságát és z_ℓ a csőben lévő víz magasságát. A cső falának vastagságát elhanyagoljuk.



2. ábra. Az elrendezés vázlata a cső különböző helyzetében

Abból a helyzetből indulunk ki, amikor a 2. ábrán látható cső nem zár be levegőt, és a teteje a víz felszínével egybeesik: változókkal kifejezve: $h = 0$ és $z_\ell = 0$ (a) eset). Ezután a csövet lassan felemeljük. A csőre kifejtett húzóerőt az $\vec{F} = F \vec{u}_z$ jelöli.

- A.1** A cső 2.b ábrán látható helyzetében fejezd ki a P_w nyomást a cső belsejében, 0.2pt a cső tetején. Fejezd ki a csőre kifejtett $\vec{F}$ húzóerőt, amely ahhoz szükséges, hogy a csövet ebben a helyzetben tartsuk. Az erőt a P_0 , ρ , m , S , h , g és $\vec{u}_z$ mennyiségek függvényében fejezd ki.

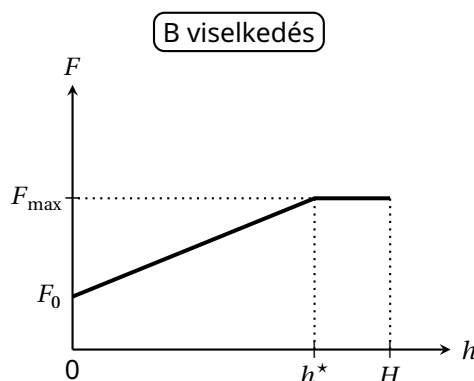
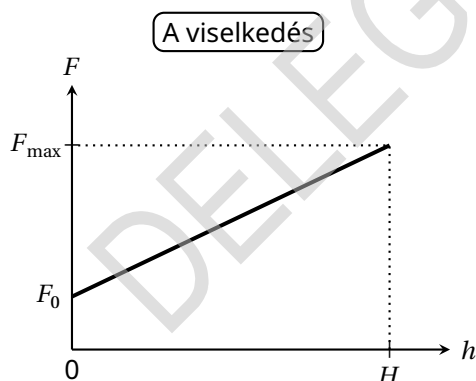
Három kísérletet végzünk el. A csövet mindegyikben a 2. a) ábrán látható kiindulási állapotból emeljük ki az 1. táblázatban megadott feltételek mellett.

Kísérlet	Folyadék	T_a (°C)	ρ (kg · L ⁻¹)	P_{sat} (Pa)
1	Víz	20	1.00×10^3	2.34×10^3
2	Víz	80	0.97×10^3	47.4×10^3
3	Víz	99	0.96×10^3	99.8×10^3

1. táblázat. Az egyes kísérletek fizikai paraméterei

(P_{sat} a tiszta folyadék telített gőz nyomását jelöli)

Minden egyes esetben megvizsgáljuk a cső egyensúlyban tartásához szükséges F húzóerőt a h magasság függvényében. A légköri nyomás $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5$ Pa értéken rögzített. Két különböző viselkedés lehetséges:



- A.2** Töltsd ki a válaszlapon található táblázatot az adott kísérlethez tartozó adatokkal. 0.8pt Add meg, hogy az adott kísérletben az A vagy B eset valósul-e meg. Számítsd ki az F_{max} és a h^* számértékeit, ha van ilyen. Az F_{max} és a h^* paramétereket a két viselkedést szemléltető ábrán mutatjuk be.

Ha a vizet higannyal helyettesítjük (tulajdonságait az alábbiakban találjuk), a B viselkedés figyelhető meg.

Folyadék	T_a (°C)	ρ (kg · m ⁻³)	P_{sat} (Pa)
Higany	20	13.5×10^3	0.163

- A.3** Fejezd ki az ε -nal jelölt relatív hibát, amelyet az $F_{\max}$ maximális húzóerő kiértékelésekor követünk el, ha a P_{sat} gőznyomást elhanyagoljuk a P_0 légnyomáshoz képest. Számítsd ki az ε hiba számértékét. 0.3pt

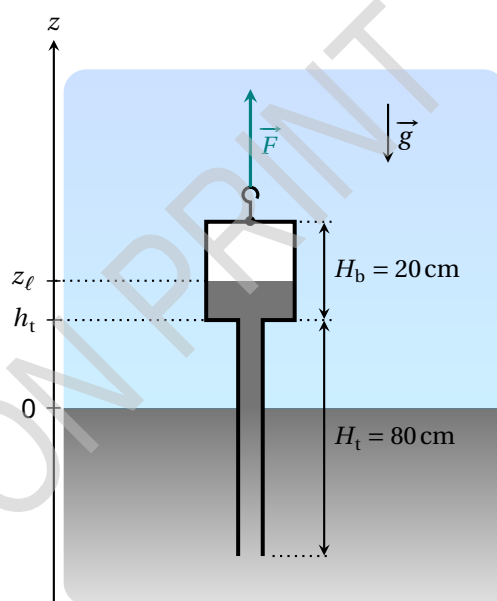
B. rész - Kétrészes barometrikus cső

Mostantól kezdve higannyal dolgozunk (sűrűség $\rho = 13.5 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). A hőmérséklet értéke $T_a = 20^\circ\text{C}$. A higany gőznyomását elhanyagoljuk $P_{\text{sat}} = 0$.

Most vegyünk egy olyan csövet, amelynek a tetején egy tartály van. A két részt együtt barométernek nevezzük. A tartályt és a csövet két különböző átmérőjű, egymásra helyezett hengerrel modellezzük, amint az a 3. ábrán látható.

- az alsó rész (amelyet továbbra is csőnek nevezünk) keresztmetszete S_t és magassága $H_t = 80 \text{ cm}$;
- a felső rész (az úgynevezett tartály) keresztmetszete $S_b > S_t$ és magassága $H_b = 20 \text{ cm}$.

A fent leírt, két részből álló barométer egy félvégtelen kádba merül.



3. ábra. A kétrészes barométer vázlata

Az A. részhez hasonlóan az eszközt úgy kell előkészíteni, hogy a barométer ne tartalmazzon levegőt. A barométer függőleges pozícióját a cső és a tartály érintkezési pontjának h_t vízszint felett mért magasságával definiáljuk. A higanyoszlop magasságát ismét a z_ℓ jelöli. Az $\vec{F}$ erő, amelyet a barométer egyensúlyban tartásához kell kifejteni a 3. ábrán látható elrendezésben, a következőképpen írható fel:

$$\vec{F} = (m_{\text{tb}} + m_{\text{add}}) g \vec{u}_z \quad (1)$$

ahol m_{tb} a kétrészes barométer teljes tömege (ha nincs benne higany).

- B.1** Az (1) egyenletben felbukkanó m_{add} tömeg a barométerben lévő higany egy részétől származik. A válaszlapon színezd ki a higany azon térfogatának megfelelő területet, amely az m_{add} kifejezésért felelős. 0.3pt

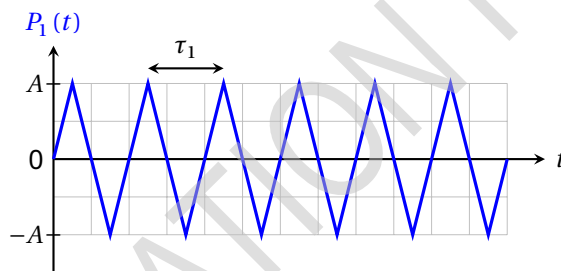
Az m_{add} tömeg függ a h_t magasságtól és a P_a légköri nyomástól. Feltételezzük, hogy a légköri nyomás állandóan $P_a = P_0 = 1.000 \times 10^5 \text{ Pa}$ értékű. Tegyük fel, hogy a barométer kezdetben teljesen elmerül úgy, hogy a legteteje esik egybe a folyadékfelszínnel. Ebből a helyzetből fokozatosan emeljük a barométert egészen addig, amíg a barométer csövének alsó nyílása egybeesik a folyadékfelszínnel.

- B.2** Készíts vázlatos grafikont a m_{add} tömeg alakulásáról a h_t barométerpozíció függvényében a $h_t \in [-H_b, H_t]$ intervallumban. A grafikonon add meg a különböző szakaszok meredekségére vonatkozó kifejezést, valamint add meg a függvény minden töréspontjának h_t analitikus értékét a P_0 , ρ , g , S_b , S_t , H_b és H_t értékek tekintetében. 1.4pt

A barométert fokozatosan emeljük, majd megállítjuk abban a helyzetben, amikor a barométerben a higanyszint éppen a felső tartály közepén van. Közben feltételezzük, hogy $P_a = P_0 = 10^5 \text{ Pa}$. A barométert ebben a helyzetben tartjuk, miközben megfigyeljük, hogyan változik az m_{add} tömeg a légköri nyomás megváltozása esetén. A légköri nyomás változzon az időben az alábbi függvény szerint:

$$P_a(t) = P_0 + P_1(t) \quad (2)$$

ahol P_0 az átlagos légnyomást jelöli, és P_1 a változást leíró kifejezés. A P_1 nyomásfüggvényt egy periodikus háromszögfüggvénnyel modellezzük, amelynek amplitúdója $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ és τ_1 periódusa 1 hét.



4. ábra. A légnyomásváltozás $P_1(t)$ időfüggésének egyszerűsített modellje

- B.3** Legyen adott, hogy $S_t = 5 \text{ cm}^2$ és $S_b = 200 \text{ cm}^2$. Fejezd ki az m_{add} tömeg időbeli változásának Δm_{add} amplitúdóját, majd számold ki numerikus értékét is. Feltételezzük, hogy a folyadékfelszín mindvégig a felső tartály belsejében marad. 0.3pt

C. rész - A Cox-féle óra

A Cox által kidolgozott eredeti mechanizmus összetett (5. ábra). Mi egy egyszerűsített változatot vizsgálunk, amelyet a 6. ábra mutat be, és az alábbiakban ismertetünk.

- egy henger alakú kád, amely a higanyfürdőt tartalmazza;
- egy, a B. részben megismert azzal megegyező felépítésű, kétrészes barométer, amely teljesen légmentes, alsó vége a kádba merül.
- a kád és a barométer egy-egy kábellel van felfüggesztve. Mindkét (nyújthatatlannak és elhanyagolható tömegűnek feltételezett) kábel ideális csigák rendszerén halad át, és ugyanazon M tömeg két oldalához csatlakozik. A tömeg egy vízszintes felületen csúszhat;
- a rendszerben lévő higany teljes térfogata $V_\ell = 5L$.

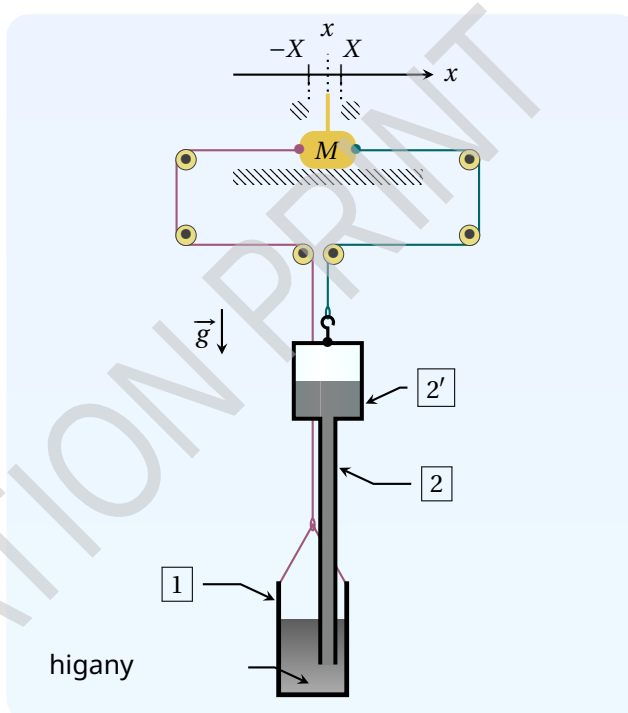
Az egyes alkatrészek magasságát, keresztmetszetét és tömegét a 2. táblázat tartalmazza. Az M tömeg helyzetét a tömegközéppontjának x koordinátája alapján kell meghatározni. A vízszintes felület és az M tömeg között súrlódás lép fel, de a tapadási és a csúszási súrlódási együttható megegyezik. Csúszás esetén a súrlódási erő F_s nagyságú.

Két ütköző korlátozza az M tömeg elmozdulását úgy, hogy $-X \leq x \leq X$ ($X > 0$). Tegyük fel, hogy X értéke úgy van megválasztva, hogy

- a barométer alja soha nem érinti a tartály alját, és nem kerül ki a folyadékfürdőből;
- a higanyoszlop felszíne z_ℓ mindig a barométer felső tartályában van.



5. ábra. Az eredeti Cox-féle óra ² (higany nélkül)



6. ábra. A készüléket modellező rendszer vázlata

Jelölés	Név	Magasság	Keresztmetszet	Üres tömeg
1	kád	$H_c = 30 \text{ cm}$	$S_c = 210 \text{ cm}^2$	m_c
2	A barométer alsó csőve	$H_t = 80 \text{ cm}$	$S_t = 5 \text{ cm}^2$	a barométer teljes tömege : m_{tb}
2'	A barométer felső tartálya	$H_b = 20 \text{ cm}$	$S_b = 200 \text{ cm}^2$	

2. táblázat. A modellrendszer méretei és jelölései

A rendszer folyamatosan változik, miközben kapcsolatban áll a környező légkörrel, amelynek nyomása a 4. ábrán látható módon ingadozik. (továbbra is $A = 5 \times 10^2 \text{ Pa}$ nyomásamplitúdóval és $\tau_1 = 1 \text{ week}$ periódussal számolva). A $t = 0$ kezdőpillanatban az M tömeg az $x = 0$ pozícióban nyugalomban van, és az M tömeg két oldalán lévő kábelek által kifejtett erők egyensúlyban vannak. Tudjuk továbbá, hogy $P_1(0) = 0$. Defináljuk a következő változót:

$$\xi = \frac{S_b + S_c - S_t}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \simeq \frac{S_b + S_c}{S_b S_c} \frac{F_s}{A} \quad (3)$$

ahol a kifejezés második felében az $S_t \ll S_b, S_c$ közelítést használjuk, amit a további problémák során végig feltételezhetünk.

- C.1** Határozd meg azt a ξ^* , küszöbértéket, amelynél az M tömeg folyamatosan nyugodomban marad, ha $\xi > \xi^*$. 1pt

Kizárólag a következő feladatban tegyük fel, hogy az M tömeget az $x = X$ pozícióban ideiglenesen rögzítjük.

- C.2** Adj összefüggést az M tömegre a ható $\vec{T} = T \vec{u}_x$ eredő erőre, melyet a két kábel fejt ki, ha $P_1 = 0$. Az eredő erőt a ρ , a g , az X és a vonatkozó keresztmetszetek függvényében fejezd ki. 1pt

Ha feltételezzük, hogy $\xi < \xi^*$, és a rendszert az $x = 0$ és a $P_1 = 0$ kezdeti paraméterekkel indítjuk, akkor két lehetséges működési tartomány valósulhat meg a $t \geq 0$ időfejlődés során. Megkülönböztetésükhöz be kell vezetnünk egy másik paramétert is:

$$\lambda = \frac{2(S_b - S_t)}{S_b} \frac{\rho g X}{A} \simeq \frac{2\rho g X}{A} \quad (4)$$

- C.3** Töltsd ki a válaszlapon található táblázatot, és jelöld meg, hogy az egyes működési tartományok milyen feltételek mellett jönnek létre. A feltételeket egyenlőtlenségek formájában kell kifejezni az ξ és/vagy a λ paraméterek felhasználásával. Rajzold fel továbbá a tömeg $x(t)/X$ normált pozícióját az idő függvényében a $t \in [0, 3\tau_1]$ intervallumban. Feltételezd, hogy a légnyomásváltozás a fentiekben bemutatott $P_1(t)/A$ függvény szerint változik. A felvázolt függvények jellemző pontjainak koordinátáit nem szükséges megadni. 2pt

A valódi Cox-órában a szerkezet által szolgáltatott energiát egy racsnis rendszer tárolja, és egy ellensúly emelésére használják, akárcsak egy hagyományos órában. Az itt vizsgált egyszerűsített modellben az óra által visszanyert energia megegyezik a vízszintes felület által a tömegre kifejtett súrlódási erő munkájával. A továbbiakban feltételezzük, hogy a rendszert úgy méretezzük, hogy az lehetővé tegye az óra számára az energiatermelést. Feltételezzük továbbá, hogy a működés körülményei nem változnak. Jelöljük W -vel a súrlódási erő által egy τ_1 periódus alatt elvégzett munkát, amelyet csupán az F_s és az X paraméterek segítségével fejezz ki.

Ha minden más működési feltétel rögzített, az F_s és az X értékeket úgy érdemes megválasztani, hogy a W munkavégzés maximális legyen. Ehhez az optimális működési állapothoz tartozó paramétereket jelöljük F_s^* és a X^* értékekkel.

- C.4** Az $S_b \simeq S_c$ és az $S_t \ll S_b$ közelítéseket figyelembe véve határozd meg az F_s^* és az X^* paramétereket a ρ , a g , az S_c és az A függvényeként. Fejezd ki az ehhez tartozó maximális W^* munkavégzést, majd számítsd ki a számértékét az $A = 5 \times 10^2$ Pa nyomásamplitúdó segítségével. 1pt

Jelöljük W_{pr}^* -el a légkör által végzett munkáját, amelyet a rendszeren az optimális helyzetben a τ_1 periódus alatt végez.



- C.5** Fejezd ki a légkör W_{pr}^* munkáját, majd számítsd ki a W^*/W_{pr}^* arányt. *Hasznos lehet a rendszer fejlődését egy (P, V) diagramon ábrázolni, ahol V a rendszer térfogata.* 1.7pt

Források:

[1]: Bruno Vacaro;

[2]: Viktória és Albert Múzeum, London.

DELEGATION PRINT