

Pezsgőt! (10 pont)

Figyelmeztetés: A túlzott alkoholfogyasztás káros az egészségre. A törvényes korhatár alatt az alkoholfogyasztás tilos! De tényleg!

A pezsgő egy francia habzóbor. A palackban a cukor erjedése során széndioxid (CO_2) keletkezik. Henry törvénye a CO_2 folyadék fázisban mért c_ℓ moláris koncentrációja és a CO_2 gázfázisban mért P_{CO_2} parciális nyomása között teremt kapcsolatot, $c_\ell = k_H P_{\text{CO}_2}$, ahol k_H a Henry-állandó.

Adatok

- A pezsgő felületi feszültsége: $\sigma = 47 \times 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$
- A folyadék sűrűsége: $\rho_\ell = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Henry-állandó $T_0 = 20^\circ\text{C}$ -on: $k_H(20^\circ\text{C}) = 3.3 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Henry-állandó $T_0 = 6^\circ\text{C}$ -on: $k_H(6^\circ\text{C}) = 5.4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$
- Légköri nyomás: $P_0 = 1 \text{ bar} = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$
- A gázok ideálisnak tekinthetők, adiabatikus együtthatójuk: $\gamma = 1.3$



1. ábra. Egy pohár pezsgő.

A. rész: Buborékok képződése, növekedése és emelkedése

Miután felbontottak egy $T_0 = 20^\circ\text{C}$ -os pezsgőt egyből megtöltöttek egy poharat. Tételezd fel, hogy a folyadékban a nyomás P_0 és a folyadék T_0 hőmérséklete állandó. Az oldott CO_2 c_ℓ koncentrációja meghaladja annak egyensúlyi koncentrációját. Tanulmányozd a CO_2 buborékok képződését. A buborék sugarát a , belső nyomását P_b jelölje.

A.1 Fejezd ki a P_b nyomást a P_0 , a és σ mennyiségek segítségével.

0.2pt

A folyadékban az oldott CO_2 koncentrációja a buboréktól mért távolságtól függ. Nagy távolságra ez a koncentráció c_ℓ , míg a buborék felületéhez közel jelöld ezt c_b -vel. Henry-törvénye értelmében: $c_b = k_H P_b$. Továbbá az egész feladat során tételezd fel, hogy a buborékban csak CO_2 található.

Mivel $c_\ell \neq c_b$, a CO_2 molekulák a magas koncentrációjú helyekről az alacsonyabb koncentrációjú helyek felé vándorolnak. Tételezd fel, hogy a folyadékfázisból a buborék felszínére eljutó CO_2 molekulák átke-
rülnek a gőzfázisba.

A.2 Határozd meg az a_c kritikus sugarat, amely felett a buborékok várhatóan növekedni fognak. Eredményedet a P_0 , σ , c_ℓ és c_0 mennyiségek segítségével add meg, ahol $c_0 = k_H P_0$. Számítsd ki numerikusan az a_c értékét, ha $c_\ell = 4c_0$.

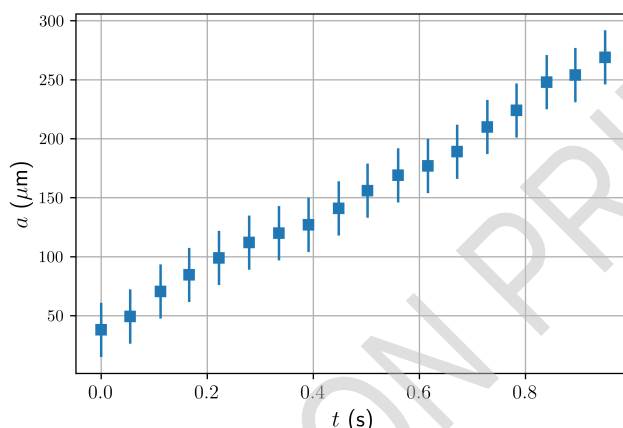
0.5pt

Tipikusan a buborékok a már jelenlévő gázüregből nőnek ki. Tekints egy $a_0 \approx 40 \mu\text{m}$ sugarú buborékot. A buborék felszínén egységnyi felületen és egységnyi idő alatt átjutó CO_2 anyagmennyiségét (mólok számát) jelölje j . Ezt a jelenséget két lehetséges modell írhatja le:

- modell (1): $j = \frac{D}{a}(c_\ell - c_b)$, ahol D a CO_2 folyadékban mérhető diffúziós együtthatója.
- modell (2): $j = K(c_\ell - c_b)$, ahol a K egy konstans.

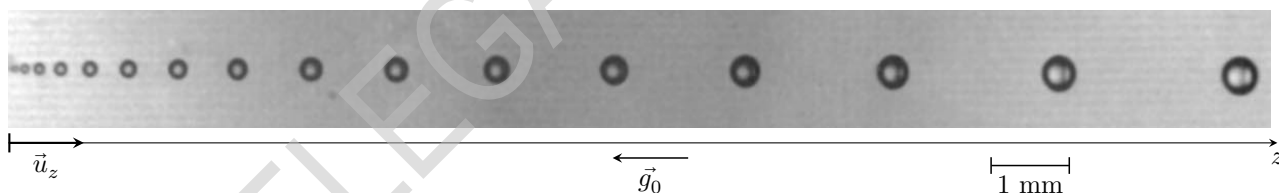
Kísérletileg meghatározták, hogy a buborék $a(t)$ sugara az idő függvényében a 2. ábrán látható módon növekszik. Itt $c_\ell \approx 4c_0$, és mivel a buborékok elég nagyok, ezért a görbületi nyomás elhanyagolható, így $P_b \approx P_0$.

- A.3** Fejezd ki a CO_2 n_c anyagmennyiségét (mólok számát) a buborékban az a, P_0, R és T_0 mennyiségek segítségével. (R az univerzális gázállandó.) Határozd meg az $a(t)$ összefüggést mindkét modell esetében. Döntsd el, hogy melyik modell írja le helyesen a **2. ábrán** látható kísérleti eredményt. Döntésedtől függően számítsd ki numerikusan K vagy D értékét. 1.2pt



2. ábra. A CO_2 buborék sugarának időbeli alakulása egy pohár pezsgőben (az [1] alapján).

Amikor a buborékok elválnak a pohár aljáról, akkor elkezdenek emelkedni és növekedni. **A 3. ábrán** állandó $f_b = 20 \text{ Hz}$ frekvenciával keltett azonos kezdeti sugarú buborékokból álló buborékvonalat láthatsz.



3. ábra. Egy buborékvonal. A képet az eredetihez képest 90 fokkal elforgatták. (az [1] alapján).

A feladat által vizsgált sebességtartományban a buborékokra ható F közegellenállási erőt a Stokes-törvény adja meg: $F = 6\pi\eta av$, ahol v a buborék sebessége, a a buborék sugara, η a folyadék dinamikus viszkozitása. A mérések szerint feltételezhető, hogy a buborék emelkedése során minden pillanatban állandósult sebességgel mozog.

- A.4** Add meg egy függőlegesen emelkedő buborékokra ható releváns erők kifejezését. 0.8pt
 Vezesd le a $v(a)$ összefüggést. Adj numerikus becslést η értékére, melyhez ρ_ℓ , g_0 és a **3. ábráról** lemérhető mennyiségeket használhatod.

A buborékok emelkedése során azok kvázi-stacionárius módon növekednek $q_a = \frac{da}{dt}$ rátával.

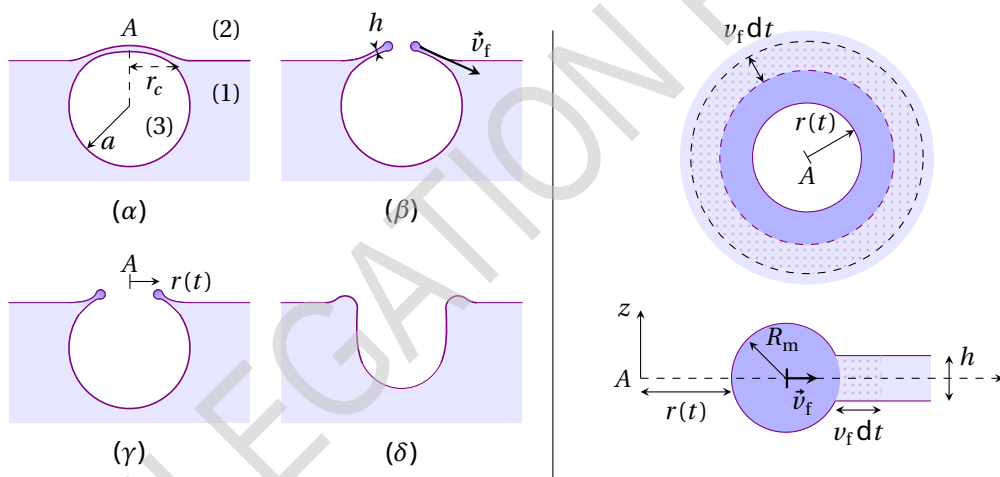
- A.5** Határozd meg a szabad felszínre elérő buborékok a_{H_ℓ} sugarát a H_ℓ emelkedési magasság, a $q_a = \frac{da}{dt}$ növekedési ráta, valamint szükséges konstansok segítségével. Tételezd fel, hogy $a_{H_\ell} \gg a_0$, és q_a állandó. Add meg a_{H_ℓ} numerikus értékét $H_\ell = 10 \text{ cm}$, valamint a **2. ábrának** megfelelő q_a esetében. 0.5pt

Tételezd fel, hogy egy pezsgőspohár alján lévő N_b képződési centrum mindegyikén állandó f_b frekvenciával keletkeznek buborékok (a pohárban a V_ℓ térfogatú pezsgő H_ℓ magasságú). a_0 továbbra is elhanyagolhatóan kicsi. Hanyagoljuk el továbbá a CO_2 diffúzióját a szabad felszínen.

- A.6** Írj fel differenciálegyenletet $c_\ell(t)$ időfejlődésére. Ennek az egyenletnek a felhasználásával határozd meg az oldott CO_2 koncentrációjának csökkenését jellemző karakterisztikus τ időt. 1.1pt

B. rész: A kipukkadó buborék hangja

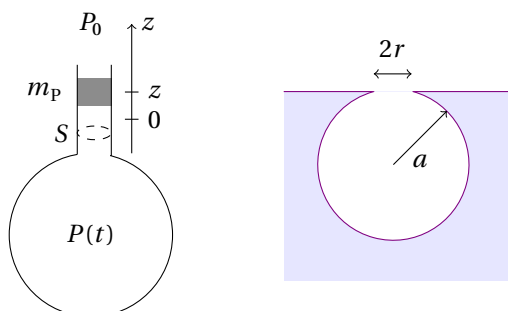
A kis buborékok közel gömb alakúak, amikor elérik a szabad felszínt. Amint a buborékot a levegőtől elválasztó folyadékhártya kellően elvékonyodik, akkor a hártyában egy r sugarú, kör alakú lyuk keletkezik, amely a felületi feszültség hatására nagyon gyorsan növekszik (**4. ábrán** balra). Kísérleti megfigyelések szerint a folyadék a lyuk körül egy hengeres peremben gyűlik össze, amelynek R_m sugara közel állandó. A lyuk sugara állandó v_f sebességgel növekszik (**4. ábrán** jobbra). A peremen kívüli hártya mozdulatlan, h vastagsága pedig állandó.



4. ábra (balra) (α) Buborék a felszínen: (1) folyadék, (2) P_0 nyomású levegő és (3) P_b nyomású CO_2 . (β) és (γ) a folyadékhártya visszahúzódását (δ) a buborék összeomlását mutatja. **(jobbra)** A folyadékhártya visszahúzódása a t időpontban. Felül: A kilyukadt folyadékhártya felülnézeti ábrája. Alul: A perem és a visszahúzódó hártya keresztmetszeti képe. A dt időtartam során a megszűnő hártyarészből (pöttyös rész) a folyadék a perembe halmozódik fel.

A dissipatív folyamatok miatt a perem és a hártya t és $t + dt$ közötti felületi energia különbségének csak a fele alakul át a felgyülemlett folyadék mozgási energiájává. Feltételezhetjük, hogy a perem felületének változása elhanyagolható a hártya felületének változásához képest.

- B.1** Fejezd ki v_f -t a ρ_ℓ , σ és h mennyiségekkel. 1.1pt



5. ábra (balra): Helmholtz-rezonátor. **(jobbra)** a buborék, mint oszcillátor.

Amikor a hártya kilyukad, akkor a nyomások kiegyenlítődnek és hang keletkezik. Ezt a hangkeltést egy Helmholtz-rezonátorral modellezzd: tekints egy S keresztmetszetű nyílással rendelkező üreget. Az üregen kívül a légkör P_0 nyomású (**5. ábra** balra). Az üreg nyakában egy m_p tömeg elválasztja a két gázteret és kis amplitúdójú rezgéseket végez a ráható, nyomásból származó erők hatására. Eközben az üregben lévő gáz adiabatikusan kitágul vagy összenyomódik. Az m_p tömegre ható gravitációs erő elhanyagolható a nyomásból származó erőkhöz képest. Amikor az m_p tömeg $z = 0$ pozícióban van, akkor a üregben lévő gáz térfogata V_0 , nyomása pedig $P = P_0$.

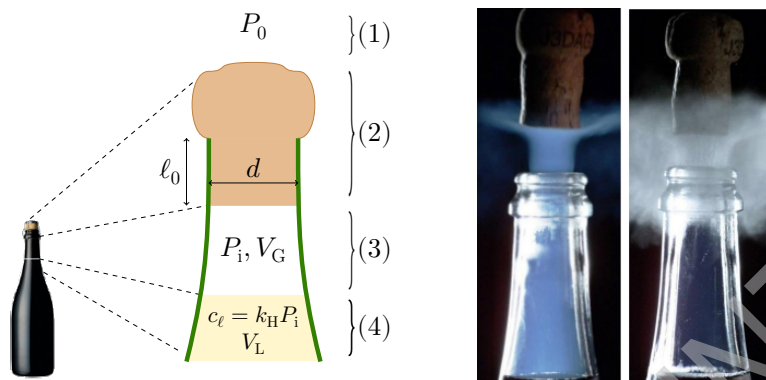
- B.2** Határozd meg az m_p tömeg f_0 rezgési frekvenciáját. Segítség: $(1 + \varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon$, 1.1pt ha $\varepsilon \ll 1$.

A Helmholtz-modell egy a sugarú buborékra is alkalmazható. V_0 a zárt buborék térfogata. Ismert az irodalomból, hogy az analógiában a dugattyú tömege $m_p = 8\rho_g r^3/3$, ahol r a kör alakú nyílás sugara, és $\rho_g = 1.8\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a gáz sűrűsége (**5. ábra** jobbra). A kipukkadás során a nyílás r sugara 0 -ról r_c -re növekszik, ahol $r_c = \frac{2}{\sqrt{3}}a^2\sqrt{\frac{\rho_g g_0}{\sigma}}$. Ezzel egyidejűleg a kibocsátott hang frekvenciája 40 kHz -re nő föl, a kipukkadási idő pedig $t_b = 3 \times 10^{-2}\text{ ms}$.

- B.3** Határozd meg a buborék a sugarát, és a buborékot a levegőtől elválasztó pezsgőhártya h vastagságát. 1.1pt

C. rész: Pezsgőbontás

Egy palackban a CO_2 teljes anyagmennyisége $n_T = 0.2\text{ mol}$, ennek egy része a $V_L = 750\text{ mL}$ térfogatú folyékony pezsgőben oldva, másik része a dugó alatti $V_G = 25\text{ mL}$ gáztérfogatban található (**6. ábra** balra). V_G csak CO_2 -t tartalmaz. A két CO_2 fázis közötti egyensúlyt a Henry-törvény írja le. Feltételezzük, hogy a palack kinyitásakor a gáznemű CO_2 tágulása egy gyors, adiabatikus és reverzibilis folyamat. A környezet T_0 hőmérséklete és $P_0 = 1\text{ bar}$ nyomása állandó.



6. ábra. Balra: hagyományos palack nyaka: (1) környező levegő, (2) parafadugó, (3) gáztérfo-
 gat, (4) folyékony pezsgő. Jobbra: A hőmérséklettől függően különböző jelenségek figyelhető-
 ek meg a palack felbontásakor ([2] alapján).

C.1 Add meg a palackban lévő gáznemű CO_2 P_i nyomásának számszerű értékét $T_0 = 6^\circ\text{C}$ és $T_0 = 20^\circ\text{C}$ hőmérsékleten. 0.4pt

A pezsgőgyártás egy másik (itt nem ismertetett) lépése miatt $T_0 = 6^\circ\text{C}$ hőmérsékleten $P_i = 4.69\text{ bar}$, míg $T_0 = 20^\circ\text{C}$ hőmérsékleten $P_i = 7.45\text{ bar}$. A következő feladatrészekben ezeket az értékeket használd.

A palack kinyitása során két különböző jelenség figyelhető meg a T_0 hőmérséklettől függően (6. ábra jobbra).

- vagy kék köd jelenik meg, a szilárd CO_2 kristályok képződése miatt (ilyenkor a víz lecsapódása gá-
 tolt);
- vagy szürkés-fehér köd jelenik meg palack száját körülvevő levegőben lecsapódó vízgőz miatt. Eb-
 ben az esetben szilárd CO_2 kristályok nem keletkeznek.

A CO_2 szilárd/gáz átmenetének $P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}$ telített gőznyomása: $\log_{10}\left(\frac{P_{\text{sat}}^{\text{CO}_2}}{P_0}\right) = A - \frac{B}{T + C}$ ahol T egysége K,
 $A = 6.81$, $B = 1.30 \times 10^3\text{ K}$ és $C = -3.49\text{ K}$.

C.2 Add meg a CO_2 gáz tágulási folyamatának végén annak T_f hőmérsékletének nu-
 merikus értékét, ha a palackot $T_0 = 6^\circ\text{C}$ -on, vagy ha $T_0 = 20^\circ\text{C}$ -on nyitjuk ki, és
 nem történik fázisátalakulás. Válaszd ki, mely állítások igazak (több helyes állí-
 tás is lehet):

1. $T_0 = 6^\circ\text{C}$ -on szürkésfehér köd jelenik meg az üveg kinyitásakor.
2. $T_0 = 6^\circ\text{C}$ -on kék köd jelenik meg az üveg kinyitásakor.
3. $T_0 = 20^\circ\text{C}$ -on szürkésfehér köd jelenik meg az üveg kinyitásakor.
4. $T_0 = 20^\circ\text{C}$ -on kék köd jelenik meg az üveg kinyitásakor.

A palack kinyitásakor a dugó kipattan. Határozd meg, mekkora H_c magassáig repül fel a dugó. Téte-
 lezd fel, hogy a palacknyak által a parafadugóra ható F súrlódási erő, $F = \alpha A$, ahol A az érintkezési felület
 nagysága és α egy meghatározandó állandó. Kezdetben a nyomások miatt fellépő eredőerő kissé fe-
 lülmúlja a súrlódási erőt. A parafa tömege $m = 10\text{ g}$, átmérője $d = 1.8\text{ cm}$, és kezdetben a palacknyakban
 lévő hengeres részének hossza $\ell_0 = 2.5\text{ cm}$. Miután a dugó elhagyta az üveg száját a nyomásból származó
 erők eredője elhanyagolható.

C.3 Add meg a H_c számértékét, ha a külső hőmérséklet $T_0 = 6^\circ\text{C}$.

1.3pt

[1] Liger-Belair *et al*, Am. J. Enol. Vitic., Vol. 50, No. 3 (1999).

[2] Liger-Belair *et al.*, Sc. Reports **7**, 10938 (2017).

DELEGATION PRINT