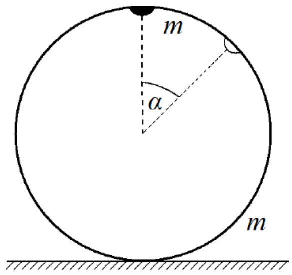
Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny

1. forduló, elméleti rész

Budapest, 2011. április 26-28.

1. feladat. (150 pont)

Egy m tömegű, vékony abroncs kerületére ugyancsak m tömegű, pontszerű nehezéket erősítettünk. Az abroncsot az *ábra* szerint érdes, vízszintes talajra állítjuk úgy, hogy a nehezék kezdetben a lehető legmagasabban helyezkedjen el. A rendszert instabil egyensúlyi helyzetéből elengedve az abroncs tisztán gördülő mozgásba kezd. (A nehézségi gyorsulás g, a tapadási súrlódási együttható elegendően nagy ahhoz, hogy az abroncs soha ne csússzon meg, az abroncs pontjai mindvégig ugyanabban a függőleges síkban mozognak.)



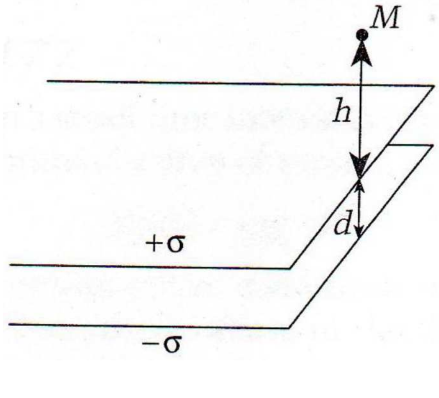
a) Mekkora az abroncs és a talaj között ható kényszererő és a tapadási súrlódási erő nagysága, amikor a nehezék éppen az $\alpha = 0°$, $90°$, illetve $180°$-os szöggel jellemezhető helyzetben van?

b) Mekkora α szögnél lesz az abroncs középpontjának gyorsulása a legnagyobb?

2. feladat. (100 pont)

Két hosszú, széles, vékony, téglalap felületű, szigetelő lap egyenletesen töltött, a lapok párhuzamosak, vízszintes síkúak, és egymás felett helyezkednek el. A felső lap felületi töltéssűrűsége $+\sigma$, míg az alsó lap töltéssűrűsége $-\sigma$.

Mekkora, és közelítőleg milyen irányú az elektromos térerősség az ábrán látható M pontban, ami a felső lap felett h magasságban, a lapok szimmetria-síkjában, a lapok éle felett helyezkedik el? (A lemezek közötti d távolság kicsi h-hoz képest ($d \ll h$).)



3. feladat. (200 pont)

Ideális gáznak nevezünk egy termodinamikai rendszert, ha a részecskék közti kölcsönhatási energia elhanyagolható a részecskék mozgási energiájához képest, valamint ha a részecskék mérete elhanyagolható a teljes rendszer térfogatához képest. Valódi gázok kellően magas hőmérsékleten, kellően alacsony sűrűség mellett jó közelítéssel teljesítik ezeket a feltételeket, és kielégítik a jól ismert ideális gáztörvényt:

$$pV = nRT, \tag{id}$$

(Itt p, V, T és n rendre a gáz nyomását, térfogatát, abszolút hőmérsékletét és mólszámát jelöli, $R = 8{,}31\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mol\cdot K}}$ az univerzális gázállandó.)

Ha azonban a gáz hőmérsékletét csökkentjük illetve sűrűségét növeljük, akkor az (id) egyenlet korrekcióra szorul. Ebben a tartományban az úgynevezett van der Waals állapotegyenlet igen jó közelítéssel írja le a gázok viselkedését, sőt, **még a folyadék–gáz fázisátalakulásról** is számot ad:

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT, \qquad (a, b > 0). \tag{vdW}$$

(Ezt az állapotegyenletet van der Waals empírikus alapon írta fel a XIX. század végén, azonban az egyenlet elméleti úton is levezethető.)

A (vdW) egyenletben szereplő a és b mennyiség az adott gázra jellemző pozitív állandó. A b paraméter úgy interpretálható, mint egy mólnyi részecske saját térfogata (hiszen ennyivel csökentjük a gáz számára rendelkezésre álló térfogatot), az a paraméter pedig a részecskék közti vonzó kölcsönhatásról ad számot, mely a nyomást csökkenti.

a) Rajzoljuk föl kvalitatíven a $p - V$ síkon a van der Waals gáz izotermáit! Mutassuk meg, hogy létezik egy olyan T_c *kritikus hőmérséklet*, amely fölött az izotermák szigorúan monoton csökkenőek, azonban a kritikus hőmérséklet alatti, $T < T_c$ izotermáknak van monoton növekedő szakaszuk a $p - V$ síkon! Határozzuk meg a T_c kritikus hőmérsékletet! (a, b, n és R függvényében.)

b) A T_c kritikus izotermának van egy vízszintes érintőjű inflexiós pontja. Határozzuk meg e ponthoz tartozó V_c kritikus térfogatot valamint p_c kritikus nyomást! (a, b, n és R függvényében.)

c) Határozzuk meg a dimenzió nélküli $K_c = \frac{nRT_c}{p_c V_c}$ *kritikus együttható* értékét! (A kísérletileg meghatározott kritikus értékekből kapott K_c érték He-nál, N_2-nél illetve víznél rendre 3,13; 3,42 illetve 4,46.)

d) A (vdW) állapotegyenletben térjünk át a $\pi := \frac{p}{p_c}$, $\omega := \frac{V}{V_c}$ illetve $\tau := \frac{T}{T_c}$ úgynevezett *redukált állapotjelzőkre*, és segítségükkel írjuk föl a van der Waals gáz *redukált állapotegyenletét*!

e) Az izotermák monoton növekedő szakaszai még túlhűtéssel, túlmelegítéssel sem érhetők el. Ezekben a pontokban az anyag instabillá válik, és *fázisszeparáció* jön létre, azaz együtt, azonos hőmérsékleten és nyomáson van jelen két különböző fázis, folyadék és gáz. Az izotermák monoton növekedő szakaszait határoló görbe a *spinodálgörbe*.

Határozzuk meg a *spinodálgörbe* egyenletét a $p - V$ síkon, illetve a $\pi - \omega$ síkon!

4. feladat. (150 pont)

Pontszerű fényforrás fényerejét 10 cm távolságban lévő kisméretű detektorral mérjük. A detektor és a fényforrás közé sík-párhuzamos üveglemezt teszünk. Ennek üvege átlátszó, a lemez merőleges a fényforrást és a detektort összekötő egyenesre, az üveg törésmutatója $n = 1{,}5$. A levegő-üveg, illetve az üveg-levegő határfelületen merőleges (illetve közel merőleges) beesés esetén a k visszaverődési együttható: $k = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$, ami megadja a felületen visszaverődő fényintenzitás mértékét.

a) Figyelembe véve az „ide-oda pattogó” fényt, a beeső fény intenzitásának mekkora hányada halad át a lemezen?

b) Számítsuk ki, hogy ha nem vesszük figyelembe az „ide-oda pattogó” fényt, akkor hány százalékos eltéréssel kapjuk meg az áthaladó intenzitás hányadot?

c) Ha a detektorral mérünk, akkor nem ezt az intenzitás hányadot jelzi a detektor. Kvalitatív módon adjuk meg az eltérés okát!

d) Egyszerűsített sugármenetet tekintve határozzuk meg közelítőleg, hogy milyen vastag lemez esetén mér a detektor ugyanakkora jelet, mint a lemez nélküli eredeti helyzetben?

Megjegyzés: A feladatban hanyagoljuk el az esetlegesen létrejövő interferencia effektusokat.

5. feladat.

Ez a feladat három, egymástól független részből áll.

I. rész (50 pont)

Kezdetben nyugvónak tekinthető deuteron és triton (deutérium és trícium atommag) reakciójából alfa-részecske és neutron jön létre, melyek mozgási energiája 17,6 MeV. Közelítőleg mekkora a szétrepülő két részecske mozgási energiája külön-külön? Szükséges-e relativisztikusan számolni?

II. rész (50 pont)

A pion (π^+) az elektronnál 273-szor nagyobb tömegű elemi részecske, melynek egyik lehetséges bomlási folyamatában pozitron és elektron-neutrínó (ν_e) keletkezik:

$$\pi^+ \to e^+ + \nu_e$$

Legalább mekkora annak a pionnak a sebessége, melynek bomlásában az e^+ és a ν_e részecskék egymásra merőlegesen repülnek szét? (A neutrínót tekintsük zérus nyugalmi tömegűnek, azaz olyan részecskének, melynek energiája és impulzusa között fennáll az $E = pc$ összefüggés!)

III. rész (50 pont)

Becsüljük meg, legalább mekkora nyomást fejt ki egy kicsiny, d oldalélű, kocka alakú dobozba zárt elektron a doboz falára!

Adatok:

Az elemi töltés: $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C

Az elektron tömege: $m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg

A proton tömege: $m_p \approx 1836 m_e$

A neutron tömege: $m_n \approx 1838{,}5 m_e$

A deuteron tömege: $m_d \approx 1{,}999 m_p$

A triton tömege: $m_t \approx 2{,}994 m_p$

Az alfa részecske tömege: $m_\alpha \approx 3{,}973 m_p$

A fénysebesség: $c = 299792458$ m/s $\approx 3 \cdot 10^8$ m/s

A Planck állandó: $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Js