KUNFALVI REZSŐ OLIMPIAI VÁLOGATÓVERSENY

1. forduló, elméleti rész

Budapest, 2012. április 17-19.

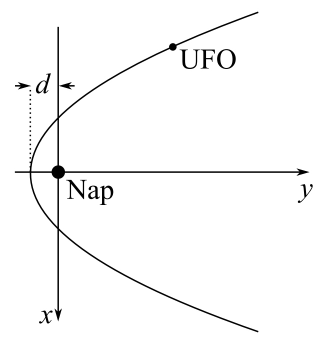
1. feladat. Kém-UFO mozgása a Nap körül

A nemzetközi SETI[1] együttműködés a Földön kívüli élet nyomainak keresésével foglalkozik. Nemrégiben a kutatásban résztvevő csillagászok egy csoportja érdekes repülő objektumra lett figyelmes az égen. A megfigyelésekről készített szupertitkos jelentés egy részlete egy szemfüles újságírónak köszönhetően napvilágra került, amely azonnal meg is jelent a napilapokban, világszerte nagy pánikot keltve:

„...A mérések szerint az azonosítatlan repülő tárgy (UFO) a Föld keringési síkjában közeledik a Naphoz. Az adatok elemzéséből az is kiderült, hogy az UFO pályája éppen olyan parabola, amelyiken szabadon esve (tehát esetleges hajtóműveit nem működtetve) a leghosszabb ideig tartózkodhat a Föld (jó közelítéssel kör alakú) pályáján belül. Ez az érdekes tény okot ad arra a feltételezésre, hogy a repülő tárgy egy földönkívüliek által küldött űreszköz, melynek célja minél több információt gyűjteni a földi életről...”

Ebben a feladatban azt a célt tűzzük ki, hogy a jelentés alapján minél több információt derítsünk ki az esetleges kém-UFO pályájáról. A számítások során feltételezhetjük, hogy a Nap gravitációs hatása mellett minden más hatás elhanyagolható. A Nap-Föld távolságot vegyük állandónak, melynek értéke $R = 1$ cs.e. (csillagászati egység).

1.a) Tegyük fel, hogy az UFO mozgása során d távolságra közelíti meg a Napot! Mekkora a parabolapálya görbületi sugara napközelben d-vel kifejezve?



1.b) A d paraméter felhasználásával írjuk fel az *ábrán* látható koordináta-rendszerben az UFO pályájának $y(x)$ egyenletét!

1.c) R és d segítségével adjuk meg annak a két pontnak a koordinátáit, ahol az UFO pályája metszi a Föld pályáját!

1.d) Mekkora d^* paraméter esetén fog az UFO a jelentésben leírt, speciális parabolapályán haladni?

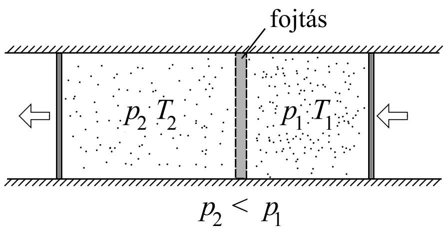
1.e) Az optimális d^* paraméter esetén mennyi időt tölt el az UFO a Föld pályasugarán belül?

[1] „Search for extraterrestrial intelligence”

2. feladat. Joule-Thomson kísérlet

A következőkben ismertetett Joule-Thomson jelenség lehetőséget nyújt gázok hatékony hűtésére még alacsony hőmérsékletek esetén is. A kísérleti berendezés a következő: egy mindkét végén dugattyúval ellátott hengeres tartály belsejét egy rögzített, porózus (lyukacsos) fal osztja két részre (lásd az *ábrát*), a hengert gáz tölti ki. A tartály fala és a dugattyúk anyaga igen jó hőszigetelő.

A kísérlet kezdetén a p_1 nyomású gáz a jobb oldali térrészben helyezkedik el, a bal oldali dugattyú pedig a porózus falnál áll. Ezután a két dugattyút lassan, egyenletesen mozgatni kezdjük a nyilak irányában, ezért a gáz elkezd átdiffundálni a porózus falon. A fal fojtó hatása következtében a bal oldalon a gáz p_2 nyomása kisebb lesz, mint a jobb oldali p_1 nyomás, de mindvégig ügyelünk rá, hogy e nyomásértékek ne változzanak. A folyamat addig tart, amíg a gáz teljes egészében át nem kerül a bal oldali térrészbe.



2.a) Mutassuk meg, hogy a gáz minőségétől függetlenül a folyamat során megmarad az $E + pV$ mennyiség, ahol E az átnyomott gáz belső energiája, p a nyomása, V pedig a térfogata!

2.b) Ha ideális gázzal végeznénk el a Joule-Thomson kísérletet, hogyan változna a gáz hőmérséklete az átnyomás során?

A Joule-Thomson kísérletben a valódi gázok az ideálistól eltérően viselkednek. A reális gázokat jó közelítéssel leíró Van der Waals-állapotegyenlet és a gáz E belső energiáját megadó formula 1 mólnyi gázmennyiségre a következő:

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \qquad E = C_V T - \frac{a}{V}, \tag{1}$$

ahol a és $b \ll V$ anyagtól függő pozitív állandók, C_V az állandó térfogaton vett mólhő, R pedig az egyetemes gázállandó. A következőkben vizsgáljunk 1 mólnyi reális gázt és tegyük fel, hogy a jobb és bal térfél közötti $\delta p = p_2 - p_1$ nyomáskülönbség kicsiny, azaz $|\delta p| \ll p_1$. Ekkor hasonlóan kicsiny lesz az átnyomási folyamat végére a gáz $\delta V = V_2 - V_1$ térfogatváltozása és $\delta T = T_2 - T_1$ hőmérsékletváltozása is: $|\delta V| \ll V_1$, $|\delta T| \ll T_1$.

2.c) Az (1) egyenletek és a **2.a)** részben bizonyított megmaradási törvény felhasználásával mutassuk meg, hogy ilyen feltételek esetén a nyomáskülönbség és a gáz hőmérsékletváltozása közötti kapcsolat vezető rendben

$$\delta T = \left(\frac{\gamma}{pV} - \lambda\right)\delta p \tag{2}$$

alakú, ahol γ és λ konstansok. Mekkora γ és λ értéke?

2.d) Ha a valódi gáz kezdeti hőmérséklete nagyobb egy bizonyos T_{inv} (ún. inverziós) hőmérsékletnél, akkor a Joule-Thomson kísérlet során a gáz felmelegszik, ellenkező esetben pedig lehűl. A (2) összefüggésben a $pV \approx RT$ közelítést használva határozzuk meg a reális gáz T_{inv} inverziós hőmérsékletét a-val és b-vel kifejezve!

3. feladat. Modern fizikai feladatcsokor

Ez a feladat három független, kisebb részből áll.

3.1. Landau-nívók. Ismert, hogy homogén mágneses mezőben az indukcióra merőlegesen mozgó elektron körpályára kényszerül. Ha a mágneses mező B indukcióját nagyon nagy értékre növeljük, az elektron viselkedése kvantumossá válik. Az elektron erős mágneses térben kialakuló energiaszintjeit Landau-nívóknak[2] nevezik.

3.1.a) Becsüljük meg, hogy alapállapotban mekkora sugarú korongban „terül szét” az elektron!

3.1.b) Mekkora energiájú fotonokat képes elnyelni egy ilyen rendszer? (Vigyázat, az elektronnak nem csak kinetikus energiája van!)

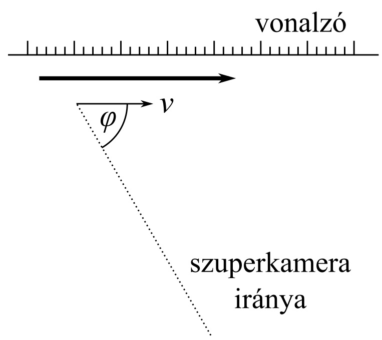
3.2. Radioaktív bomlás. Maghasadásos reakciókban gyakran keletkezik $^{92}\mathrm{Sr}$ izotóp, amely két egymást követő β-bomlással a stabil $^{92}\mathrm{Zr}$-ra bomlik:

$$^{92}\mathrm{Sr} \xrightarrow{2{,}66\ \mathrm{h}} {}^{92}\mathrm{Y} \xrightarrow{3{,}54\ \mathrm{h}} {}^{92}\mathrm{Zr}.$$

Egy adag vegytiszta $^{92}\mathrm{Sr}$ preparátum elkészítése után mennyi idővel lesz a keletkező $^{92}\mathrm{Y}$ mennyisége a legnagyobb?

Útmutatás: Próbáljuk az egyenleteket egyetlen radioaktív bomlási egyenletre visszavezetni, melynek változója a stroncium és ittrium részecskeszámának lineárkombinációjaként képzett „redukált részecskeszám”!

3.3. Relativisztikus nyílvessző. Egy L_0 nyugalmi hosszúságú nyílvessző a fénysebességgel összemérhető v sebességgel halad el egy álló, a haladási irányával párhuzamos vonalzó előtt. A nyílvesszőről egy távoli, a haladási irányhoz képest φ szögben elhelyezkedő, lényegében nulla expozíciós idejű szuperkamerával pillanatképet készítünk.



3.3.a) Milyen hosszúnak látszik a nyílvessző a fotón? (Másképp: a vonalzónak milyen hosszú része van takarásban a fényképen?)

3.3.b) Mekkora sebességgel mozog a nyíl, ha a $\varphi = 60°$-ban elhelyezkedő szuperkamera által készített pillanatképen éppen L_0 hosszúságúnak látszik?

[2] Lev D. Landau (1908-1968) szovjet fizikus