Fontos tudnivalók

- Az elméleti forduló időtartama 4 óra. A feladatok hibátlan megoldásával összesen 450 pontot lehet szerezni, a részpontszámok az egyes kérdések után zárójelben fel vannak tüntetve. Figyelem! Az összes feladathoz egyetlen, közös adattáblázat tartozik, ami a feladatokban szereplő konstansokat, fizikai állandókat tartalmazza (lásd a lap alját).
- A részletes számolásokat a rendelkezésre álló fehér lapokon végezd! Az egyéb (füzetből kitépett, négyzetrácsos stb.) lapra írt megoldásokat nem tudjuk értékelni. Lehetőleg minél kevesebb szöveget használj, megoldásaidat igyekezz főleg egyenletekkel, számokkal, szimbólumokkal és grafikonokkal kifejezni! Ha azt szeretnéd, hogy megoldásod egy része ne kerüljön értékelésre, tedd zárójelbe azt a részt, és egy vonallal húzd át! (Az áthúzott, de helyes megoldást nem tudjuk értékelni.)
- Minden lapra írd rá a nevedet! Ügyelj rá, hogy *minden feladat megoldása külön lapra kerüljön*, mert a különböző feladatokat más-más javító fogja értékelni.
- Végeredményeidet a feladatokhoz tartozó válaszlap megfelelő mezőjébe is írd be! Mindenképp szakíts időt a válaszlap kitöltésére! Azon feladatokhoz tartozó mezőket, amelyekkel érdemben nem foglalkoztál, hagyd üresen!
- A verseny teljesen egyéni. A feladatok megoldásához író- és rajzeszközökön, valamint kétsoros (nem grafikus) számológépen kívül semmilyen segédeszköz (könyv, füzet, internet, számítógép, mobiltelefon stb.) nem használható.

Fizikai állandók táblázata

univerzális gázállandó:	$R = 8{,}314\ \mathrm{J/(mol \cdot K)}$
gravitációs állandó:	$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg\ s^2)}$
Planck-állandó:	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}$
elektron tömege:	$m_\mathrm{e} = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$
proton tömege:	$m_\mathrm{p} = 1{,}673 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$
a Nap tömege:	$M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}\ \mathrm{kg}$

Hasznos matematikai összefüggések

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int x \cos x \,\mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny

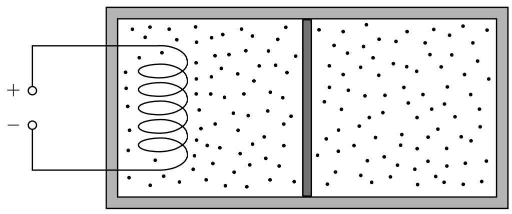
1. forduló, elméleti rész

Budapest, 2015. április 8–10.

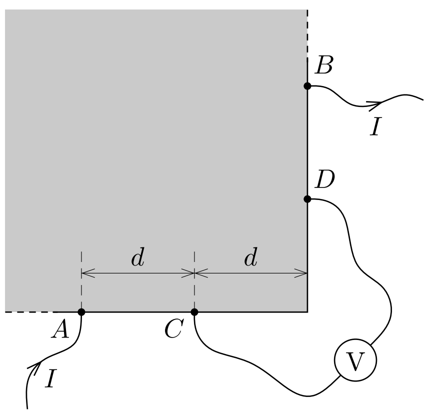
1. feladat. (Ez a feladat három független, kisebb részből áll.) *(150 p)*

1.A. Egy függőleges tengelyű mérőhenger falába sűrűn, egyenletes elrendezésben apró lyukakat fúrtunk. A hengert H magasságig feltöltjük vízzel, melynek következtében a lyukakon (a mérőhenger falára merőlegesen) vékony vízsugarak lövellnek ki. Milyen alakú a vízsugarak burkolófelülete? (A vízsugarak nem akadályozzák egymást, és folyamatos utántöltéssel gondoskodunk a hengerben a vízszint állandóságáról.) *(50 p)*

1.B. Hőszigetelt hengert egy könnyen mozgó, hőszigetelő dugattyú oszt két részre az *ábrán* látható módon. A két rekeszben azonos anyagmennyiségű és (kezdetben) azonos hőmérsékletű héliumgáz van. A bal oldali térrészben lévő gázt egy fűtőszál segítségével lassan melegíteni kezdjük. Mekkora ebben a folyamatban a bal oldali gáz mólhője, amikor a dugattyú elmozdulása még kicsi? *(50 p)*



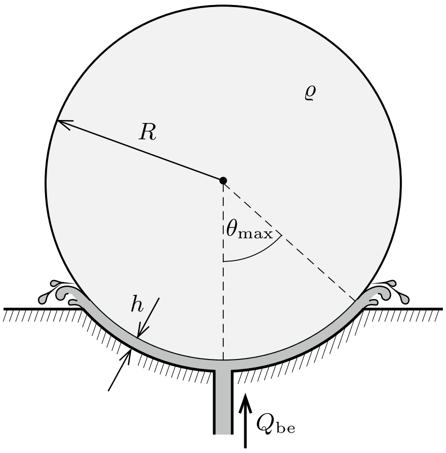
1.C. Egy nagyméretű, négyzet alakú, vékony fémlemez anyagának fajlagos ellenállását szeretnénk megmérni. Ehhez a lemez egyik csúcsának közelében kiválasztjuk a két szomszédos oldalélen található A, B, C és D pontokat az *ábrán* látható módon. (Az A és B pontok távolsága a kiválasztott csúcstól $2d$, a C és D pontoké pedig d, ahol d sokkal kisebb a fémlemez oldalhosszánál.)



Ha az A pontba I erősségű áramot vezetünk, a B pontból pedig elvezetjük azt, akkor a C és D pontok közé kapcsolt voltmérő U feszültséget jelez. Határozzuk meg a fémlemez ϱ fajlagos ellenállását, ha tudjuk, hogy a lemez vastagsága δ! *(50 p)*

2. feladat. Furfangos szökőkút *(150 p)*

Köztereken, parkokban gyakran láthatunk olyan szökőkutat, amely „vízen úszó” gránitgömbből vagy gránithengerből áll (lásd a jobb oldali fényképet). Az ilyen szökőkutak felépítése a következő: a (rendszerint tömör) gránitgömb vagy gránithenger egy jól illeszkedő vályúban található, melynek alján rés van. A résen keresztül egy szivattyú folyamatosan vizet pumpál a vályúba, amely a vályú pereménél kifolyik. A gránittömb és a vályú között vékony (általában 1–2 milliméter vastagságú) vízréteg alakul ki, így az nem érintkezik a vályú falával, csak a vízzel. Vajon hogyan képes megtartani a víz a nála sokkal nagyobb sűrűségű gránittömb súlyát? Ez a feladat ezzel a kérdéssel foglalkozik.



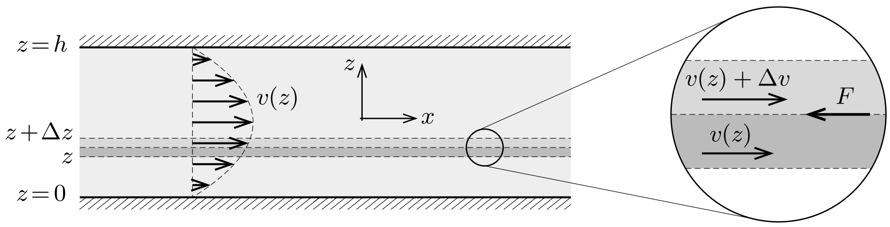
Az egyszerűség kedvéért a gránittömböt egy L hosszúságú, R sugarú, ϱ sűrűségű tömör hengernek tekintjük, ahol $L \gg R$. A vályú alján található befolyónyílás legyen egy L hosszúságú, keskeny rés, így a feladat során elegendő csupán az *ábrán* látható síkmetszetben vizsgálódnunk. A vályú magasságát a $\theta_{\max}$ szöggel jellemezhetjük. A résen áthaladó vízhozamot az időegység alatt befolyó víz térfogatával írhatjuk le, amely időben állandó:

$$Q_{\mathrm{be}} \equiv \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

A feladatban vizsgált konkrét szökőkútnál legyen $L = 2$ m, $R = 0{,}3$ m, $\theta_{\max} = 30°$; a gránit ϱ sűrűsége pedig a víz $\varrho_{\text{víz}}$ sűrűségének 2,75-szerese.

2.1. A víz hidrosztatikai felhajtóereje nyilván nem képes megtartani a gránithenger súlyát. Adjuk meg a felhajtóerő és a gránithengerre ható nehézségi erő hányadosát ϱ, $\varrho_{\text{víz}}$ és $\theta_{\max}$ segítségével, majd adjuk meg az eredményt számszerűen is! *(10 p)*

A továbbiakban a felhajtóerő szerepét hanyagoljuk el! A gránithengert megtartó erő megértéséhez figyelembe kell vennünk az áramló víz belső súrlódását. Ehhez tekintsünk egy folyadékot, amely két vízszintes, párhuzamos, egymástól h távolságra lévő síklap között lassan áramlik x irányban (lásd az *ábrát*).



Ha két szomszédos folyadékréteg (például az ábrán látható, az alsó síklaptól z és $z + \Delta z$ távolságra található rétegek) különböző sebességgel mozog, akkor közöttük a Δv relatív sebességükkel és az érintkezési felületük nagyságával arányos súrlódási erő ébred (Newton-féle súrlódási törvény):

$$F = \eta A \frac{\Delta v}{\Delta z}, \tag{1}$$

ahol η a folyadék anyagára jellemző állandó, a viszkozitás. Ez az erő benne van a folyadékok érintkezési felületének síkjában, és a relatív sebességgel ellentétes irányba mutat. A $\sigma = F/A$ mennyiséget nyírófeszültségnek nevezzük.

2.2. Mivel a folyadék z irányban nem áramlik, így ebben az irányban nem hat nyírófeszültség, ezért a folyadékban a nyomás csak az x koordinátától függ, z-től nem. Mutassuk meg, hogy stacionárius (időben állandó) áramlás esetén a $\sigma(z)$ nyírófeszültség térbeli változása (gradiense) és a $p(x)$ nyomás gradiense között fennáll a

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta z} \tag{2}$$

összefüggés. *(20 p)*

2.3. A (2) egyenlet bal oldala csak x-től, jobb oldala pedig csak z-től függ, ezért mindkét oldalnak külön-külön állandónak kell lennie. Jelöljük ezt az állandót $-K$-val, ahol K pozitív mennyiség:

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta \sigma}{\Delta z} = -K.$$

Lássuk be, hogy a síklapok között a folyadék sebessége a

$$v(z) = Az^2 + Bz + C \tag{3}$$

függvénnyel írható le, és határozzuk meg az A, B és C konstansok értékét η, h és K segítségével! (A folyadék sebessége a síklapoknál nulla.) *(25 p)*

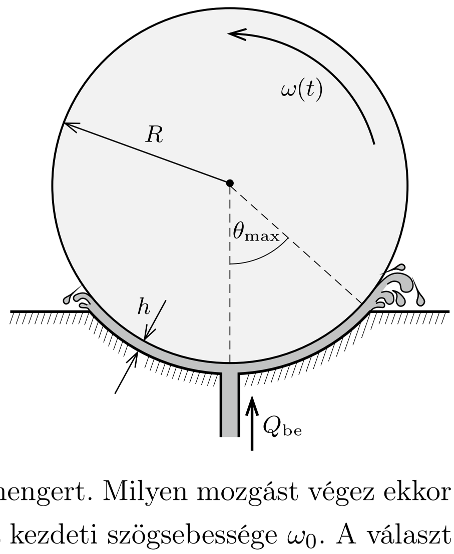
2.4. A szökőkút esetében a vízréteg vastagsága sokkal kisebb a gránithenger sugaránál, ezért használhatjuk a **2.2**–**2.3** részfeladatokban kapott eredményeket. Határozzuk meg, mekkorának kell lennie a túlnyomásnak a vályú alján (a víz beáramlási pontjánál) ahhoz, hogy a gránithenger egyensúlyban legyen! Válaszunkat ϱ, R, $\theta_{\max}$ és a g nehézségi gyorsulás segítségével adjuk meg! (Számításainkban a hengerre érintőirányban ható nyírófeszültség hatását és a Bernoulli-törvényből származó nyomáscsökkenést hanyagoljuk el.) *(30 p)*

2.5. Határozzuk meg a vályú alján található nyíláson beáramló víz Q_{be} hozamát, ha ismert, hogy a vályú és a gránithenger közötti vízréteg vastagsága h. A választ az η, ϱ, $\theta_{\max}$, g, L és h mennyiségek felhasználásával adjuk meg. *(25 p)*

2.6. Ha a gránithengert tengelye körül forgásba hozzuk, a **2.3.** részfeladatban a víz sebességprofiljára kapott (3) formulát módosítani kell egy z-vel egyenesen arányos tag hozzáadásával:

$$v(z,\omega) = v(z) \pm Dz,$$

ahol $v(z,\omega)$ a henger ω szögsebességétől függő sebességprofil, D a szögsebességet tartalmazó arányossági tényező, a $\pm$ előjel pedig a henger két oldalán áramló folyadékrészre utal. Fejezzük ki D értékét ω, R és h segítségével, ha továbbra is fennáll, hogy a víz falakhoz viszonyított relatív sebessége zérus. *(15 p)*



2.7. Forgás közben a víz által kifejtett nyírófeszültség fékezi a gránithengert. Milyen mozgást végez ekkor a henger? Adjuk meg a henger szögsebességét az idő függvényében, ha a kezdeti szögsebessége ω_0. A választ ϱ, R, h, $\theta_{\max}$, ω_0 és η segítségével adjuk meg! *(25 p)*

3. feladat: Fehér törpék keletkezése. *(150 p)*

A Naphoz hasonló, életük derekán járó csillagok stabil objektumok. A csillag belsejében magfúzió útján folyamatosan termelődő energia igyekezne a csillag anyagát kifelé lökni; ez az effektus akadályozza meg a gravitációs összeomlást és tartja fenn a stabil egyensúlyt. Az egyensúlyi állapot mindaddig fennáll, amíg el nem fogy az összes hidrogén: ekkor a gravitációs vonzás elkezdi összeroppantani a csillagot. A Nappal megegyező (vagy ahhoz közeli) tömegű csillagok esetében ez az összeroskadás nem tart örökké: a *fehér törpe* állapot elérésével a csillag stabilizálódik, az összeroppanás befejeződik. Ez a feladat a fehér törpék keletkezésének fizikájával foglalkozik.

3.1. Vizsgáljunk egy gömb alakú, R sugarú, M tömegű csillagot. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a csillag tömegeloszlása egyenletes. Határozzuk meg a csillag teljes E_{grav} gravitációs energiáját! *(30 p)*

A magfúzió leállásakor a gravitáció összehúzó hatását kezdetben semmi sem tudja ellensúlyozni, ezért a csillag sugara csökkenni kezd. Ez a folyamat azonban egy kvantummechanikai hatásnak (a csillagban lévő elektronok ún. *degenerációs nyomásának*) köszönhetően megállhat, és a csillag stabil végállapotba kerülhet (*fehér törpe*). A **3.2.–3.4.** részfeladatok a degenerációs nyomás fizikai okával foglalkoznak.

3.2. Tekintsünk egy L oldalélű, kocka alakú dobozba zárt elektront. A derékszögű koordináta-rendszerünk tengelyeit válasszuk a kocka oldaléleivel párhuzamosnak. Adjuk meg az elektron (p_x, p_y, p_z) impulzuskomponenseinek lehetséges értékeit L és a h Planck-állandó segítségével! *(20 p)*

3.3. Ha a **3.2.** részfeladatban szereplő kocka alakú dobozba nem egy, hanem N darab ($N \gg 1$) elektront helyezünk, akkor alapállapotban az elektronok a lehetséges legalacsonyabb energiájú állapotokat töltik be. (Most és a továbbiakban az elektronok közötti Coulomb-kölcsönhatást **hanyagoljuk el**, mert az a kvantumos viselkedésből származó erőhatásnál sokkal gyengébb.) A Pauli-elv értelmében azonban egyszerre legfeljebb két elektron lehet ugyanabban a (p_x, p_y, p_z) számhármassal jellemzett kvantumállapotban. Mutassuk meg, hogy alapállapotban azok az elektronállapotok betöltöttek, melyek impulzusára fennáll a

$$\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \le p_{\max}$$

egyenlőség, és adjuk meg $p_{\max}$ (közelítő) értékét L és N függvényében! *(30 p)*

3.4. Mutassuk meg, hogy ekkor az N elektront tartalmazó rendszer teljes (kinetikus) energiája

$$E_N = \alpha \cdot \frac{h^2}{m_{\mathrm{e}}} N^{\beta} L^{\gamma}$$

alakú, ahol α, β és γ dimenziótlan konstansok. Határozzuk meg ezen konstansok számszerű értékét! (Vegyük figyelembe, hogy N nagy, ezért a szummázást integrállal közelíthetjük. A kocka alakú doboz mérete elegendően nagy ahhoz, hogy a bezárt elektronok viselkedése nemrelativisztikus legyen.) *(40 p)*

Mivel a csillagok nem kocka alakúak, a degenerációs energia pontos kiszámításához a **3.4.** részfeladatban kapott egyenlet kis változtatásra szorul. L helyére a csillag R sugarát helyettesítve, valamint α értékét módosítva azonban helyes formulához jutunk:

$$E_N = \frac{3}{10 \cdot 2^{2/3}} \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{4/3} \frac{h^2}{m_{\mathrm{e}}} N^{\beta} R^{\gamma},$$

ahol β és γ a korábban kapott értékek, N pedig az elektronok száma. (A csillag összességében semleges, és feltehetjük, hogy ugyanannyi protont tartalmaz, mint elektront. A protonok is létrehoznak degenerációs nyomást, ez azonban a nagy tömegük miatt sokkal kisebb, mint az elektronok járuléka, ezért elhanyagolható.)

3.5. A csillag teljes energiája az E_{grav} gravitációs energia és az E_N degenerációs energia összege. Írjuk fel a teljes energiát a csillag sugarának függvényében, majd határozzuk meg a csillag végső, egyensúlyi R_{ft} sugarát, az úgynevezett fehér törpe rádiuszt! Számítsuk is ki számszerű értékét a Nap esetére! *(30 p)*