



II. Feladat: Lézer (10 pont)

A lézer (LASER) mozaikszót Gordon Gould amerikai fizikus vezette be 1957-ben az angol „light amplification by stimulated emission of radiation” (fényerősítés sugárzással indukált emisszió segítségével) szó szerkezetre. A lézerberendezés koherens és monokromatikus sugárzást hoz létre egy kvantumfizikai jelenség, az indukált emisszió felerősítésének segítségével. A hagyományos lézerberendezés három fő részből áll:

- A. aktív közegből, melynek szerkezeti elemei az atomok, vagy molekulák;
- B. egy külső ún. pumpáló berendezésből; ez szolgáltatja a szükséges energiát az indukált emisszió beindításához és fenntartásához.
- C. rezonátorból;

Az indukált emisszió azt jelenti, hogy egy gerjesztett állapotban található kvantumrendszerre (atomokra) beeső, külső elektromágneses sugárzás létrehozhat egy átmenetet egy kisebb energiájú állapotba, melyet a beesővel azonos frekvenciájú és fázisú sugárzás kibocsátása követ (a két sugárzás koherens).

A. Az aktív közeg (4 pont)

- a) Egy bizonyos atomos gáz két, 1-es és 2-es energiaszinttel rendelkezik. A gáz T hőmérsékleten egy elektromágneses sugárzás (hősugárzás) terében található. A hősugárzás hatására a gázban három folyamat jön létre:

- Az atomok egy-egy foton elnyelésével (abszorpcióval) átmehetnek az 1-es állapotból a 2-es állapotba (indukált elnyelés). E folyamat során az 1-es állapotban lévő atomok számának változási üteme a következő összefüggéssel írható le:

$$\frac{dN_1}{dt} = -B_{12}N_1\rho(\omega),$$

ahol N_1 az 1-es szinten található atomok száma, $\rho(\omega)$ pedig a sugárzás ún. spektrális energiasűrűsége (egységnyi frekvenciaintervallumba eső energiasűrűsége):

$$\rho(\omega) = \frac{2\hbar\omega^3}{\pi^3} \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}.$$

Itt $\hbar\omega$ az elnyelt foton energiája, míg B_{12} az indukált abszorpcióra vonatkozó Einstein-féle együttható.

- Az atomok gerjesztett állapota megszűnhet spontán fotonkibocsátás (emisszió) következtében. Ennek során a gerjesztett energiaszinten lévő atomok számának dinamikáját leíró összefüggés:

$$\frac{dN_2}{dt} = -A_{21}N_2,$$

ahol A_{21} a spontán emisszióra vonatkozó Einstein-féle együttható.

- Az atomok gerjesztett állapota megszűnhet indukált fotonkibocsátás következtében. Ebben a folyamatban az atomok számának időbeli változását megadó formula:

$$\frac{dN_2}{dt} = -B_{21}N_2\rho(\omega),$$

ahol B_{21} az Einstein-féle együtttható az indukált emisszióra. Ez a folyamat akkor történik meg, amikor a gáz olyan sugárzás jelenlétében található, melynek frekvenciája megfelel a két szint energiakülönbségének.

Fejezd ki az $\frac{A_{21}}{B_{21}}$ és $\frac{B_{12}}{B_{21}}$ arányokat termodinamikai egyensúly esetében. Vedd figyelembe, hogy termodinamikai egyensúlyban a különböző energiaszinteken található atomok számának arányát a Boltzmann-eloszlás adja meg, és hogy a fenti arányok ugyanakkorák minden hőmérsékleten.

- b) A gáz atomos hidrogén alkotja. (A hidrogénatom energiája alapállapotban $E_1 = -13,6 \text{ eV}$, az első gerjesztett szint energiája $E_2 = -3,4 \text{ eV}$, míg az atom átlagos élettartama az első gerjesztett szinten $\tau = 1,6 \text{ ns}$). Dinamikus egyensúly esetén a $2 \rightarrow 1$ spontán átmenet során kibocsátott teljesítmény $1,0 \text{ mW}$.

Fejezd ki és számítsd ki: az Einstein-féle együttthatókat, a gáz hőmérsékletét, melyre a gerjesztett állapotok spontán és indukált megszűnésének valószínűségei egyenlők, valamint az első gerjesztett állapotban található atomok számát (ún. populációját).

- c) Optikai pumpálásnak azt a folyamatot nevezzük, amikor az atomokat egy külső fényforrással az alapállapotból a legfelső energiaszintre juttatjuk. Az optikai pumpálást felhasználó (folytonos üzemű) lézerberendezés működéséhez az aktív közegnek rendelkeznie kell legalább három energiaszinttel, melyeknek jellemzői a következők:
- a legkisebb energiájú állapot az alapállapot;
 - a legnagyobb energiájú állapotból az alapállapotba történő átmenet időállandója kicsi kell legyen (10^{-7} s vagy 10^{-8} s nagyságrendű);
 - egy energiaszint-pár (az ún. lézerszintek) csatolásának gyengének kell lennie (azaz a két szint közötti átmenet időállandójának nagynak kell lennie a többihez képest);
 - ha egy magasabb energiaszintről az alapállapotba többféle úton is eljuthat az atom, akkor az átmenet az összes lehetőség közül mindig a lehető legrövidebb időt igénylő módon jön létre;
 - A felső lézerszintnek metastabilnak kell lennie (azaz átlagos élettartama nagyobb kell hogy legyen $1 \mu\text{s}$ -nál), valamint az alsó lézerszint élettartamának kisebbnek kell lennie ennél.

Egy bizonyos aktív közeg az alapállapota (G) fölött hat energiaállapottal rendelkezik, melyeket A-tól F-ig betűztünk meg. Ezeknek a szinteknek az alapállapothoz viszonyított energiája a következő: $E_A = 2 \text{ eV}$, $E_B = 1,9 \text{ eV}$, $E_C = 1,7 \text{ eV}$, $E_D = 1,6 \text{ eV}$, $E_E = 1,1 \text{ eV}$, és $E_F = 0,4 \text{ eV}$. A különböző lehetséges átmenetek időállandói: $\tau_{AG} = \tau_{AC} = \tau_{BG} = \tau_{FG} = 10 \text{ ns}$,

$\tau_{BC} = \tau_{BD} = 50 \text{ ns}$, $\tau_{EF} = 10^2 \text{ ns}$ és $\tau_{BE} = \tau_{CD} = \tau_{CE} = \tau_{DF} = \tau_{EG} = 10^4 \text{ ns}$.

Rajzold fel ennek az aktív közegnek az energiaszintjeit, és jelöld a szintek közötti lehetséges átmeneteket, melyekkel lézert hozhatunk létre. Külön jelöld, melyek lehetnek a lézerszintek, és rajzold be közöttük a (lézer-)átmenetet. Számítsd ki a hullámhosszak értékét mindegyik átmenet esetén, valamint a pumpálás során bekövetkező átmenet esetében is.

B. A pumpálásra használt külső fényforrás (2 pont)

A pumpálás sebessége alatt az egységnyi idő alatt egységnyi térfogatban található, a külső pumpáló rendszer által gerjesztett atomok számát értjük.

- d) Egyenes henger alakú, 5,0 mm átmérőjű és 6,5 cm hosszúságú rezonátort két azonos fényforrással egyenletesen pumpálunk. Mindkét fényforrás külön-külön 1 kW teljesítményt fogyaszt. A pumpálás hatásfoka 4%, míg a lézersugárzás hullámhossza 940 nm.

Fejezd ki a pumpálási sebességet paraméteresen, majd határozd meg értékét számszerűen is.

- e) A gáz atomjai két különböző $E_1 < E_2$ energiájú állapotot foglalhatnak el. Termodinamikai egyensúly esetén a két energiaszint populációja közötti különbség ΔN_e . Egy adott pillanatban bekapcsolunk egy fényforrást, amelyből I intenzitású és $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$ körfrekvenciájú elektromágneses hullám halad át a gázon. Az E_2 energiájú gerjesztett szint átlagos élettartama τ . Az időegység alatt bekövetkező indukált átmenetek valószínűsége $w = \frac{\sigma I}{\hbar \omega}$, ahol σ konstans (amit az említett folyamatok hatáskeresztmetszetének nevezünk).

Bizonyítsd be, hogy ha a pumpáló fényforrások bekapcsolásakor a két szint populációi közötti különbség eltér ΔN_e -től, akkor az adott két szint populációi közötti különbség nagyon hosszú

idő után felírható $\Delta N_\infty = \frac{\Delta N_e}{1 + \frac{I}{I_s}}$ alakban. Add meg a telítési intenzitás I_s kifejezését.

C. Optikai rezonátor (4 pont)

Az aktív közegen áthaladó fény intenzitása két, egymástól bizonyos távolságra található, párhuzamos tükrön történő egymás utáni, sokszoros visszaverődés következtében felerősödik. Ez alkotja az úgynevezett optikai rezonátort. A sugárzás gyengül a tükrökön történő visszaverődések, a tükrök szélein való diffrakció és a fényszóródás következtében. Az egyik tükör fényintenzitásra vonatkozó visszaverődési tényezője R_1 , melynek értéke a lehető legközelebbi az egységhez, míg a második tükör R_2 visszaverődési tényezője az elsőnél kisebb azért, hogy a fényfluxus egy bizonyos részét lézernyaláb formájában kicsatolhassuk a rezonátorból a külső környezet felé.

- f) Egy ilyen rezonátor tükrei párhuzamos, egymástól L távolságra található, egyenként a sugarú, kör alakú sík felületek. A fénysugárzás hullámhossza λ .

Becsüld meg a fényhullám által a tükrök között oda-vissza megtett utak maximális számát úgy, hogy a diffrakció okozta veszteségek elhanyagolhatóak legyenek.

- g) Mivel a lézer egy optikai rezonátor, ezért az oszcillátorok (pl. rezgőkörök) elméletében használatos kifejezéseket gyakran használjuk a lézerek elméletében is. Lézer esetében például a rezonátor Q jósági tényezőjét úgy definiáljuk, hogy a lézersugárzás körfrekvenciájának (ω) és a rezonátorban tárolt pillanatnyi sugárzási energiának (W) szorzatát elosztjuk a sugárzási energia változási ütemének ellentettjével.

Feltételezve, hogy ismerjük a rezonátorbeli lézersugárzás kezdeti W_0 energiáját, határozd meg a lézersugárzás energiáját az idő függvényében a rezonátor jósági tényezőjének, illetve a lézersugárzás ω körfrekvenciájának függvényében. Add meg a lézersugárzás energiájának

relaxációs idejét is (amely megadja, hogy mennyi idő után csökken a rezonátorban lévő sugárzás energiája $1/e$ részére).

- h) Megfelelő körülményekkel elérhető, hogy a felső (nagyobb energiájú) lézerszint populációja nagyobb legyen, mint az alsó szint populációja (ezt nevezzük populációinverzióknak). Ilyen esetben a rezonátoron történő ismételt áthaladás miatt a lézersugár nyalábjának erőssége exponenciális törvény szerint növekszik: $I(x) = I_0 e^{\alpha x}$, ahol $\alpha > 0$ az intenzitás erősítési együtthatója. A két tükrön történő visszaverődés (melyeknek visszaverődési tényezőik $R_1 > R_2$) miatt megjelenő veszteségeken kívül az összes többi veszteségre (diffrakció, elnyelés, szóródás) a fentihez hasonló összefüggést írhatunk fel: $I(x) = I_0 e^{-\beta x}$, ahol $\beta > 0$ a sugárzás erősségének csillapítási tényezője.

Fejezd ki és számítsd ki a lézerküszöbnek (1-es eredő erősítés) megfelelő erősítési együtthatót, és fejezd ki a jósági tényezőt az erősítési együttható küszöbértékének, valamint a rezonátorban található félhullámok m számának függvényében, ha csak longitudinális állóhullámok jönnek létre. Határozd meg a rezonátor jósági tényezőjét számszerűen is.

A tükrök visszaverődési tényezői $R_1 = 0,99$ és $R_2 = 0,95$, a tükrök közötti távolság $L = 1,0$ m, a felerősített optikai sugárzás frekvenciája $\nu = 5,0 \cdot 10^{14}$ Hz, míg az összes veszteség, kivéve a visszaverődéskor keletkezőket, 2% ciklusonként (egy oda-vissza út alatt).

- i) Legyenek a tükrök visszaverődési tényezői továbbra is $R_1 = 0,99$ és $R_2 = 0,95$, a tükrök közötti távolság $L = 1,0$ m, míg az erősített optikai sugárzás frekvenciája $\nu = 5,0 \cdot 10^{14}$ Hz. Az eredő erősítési tényező legyen most ciklusonként 5%, ami nem függ az intenzitástól. Ha az erősítés egyetlen fotonnal kezdődik, akkor a rezonátorból kicsatolt lézersugárzás teljesítménye mennyi idő után éri el az 1 mW értéket?
- j) Egy aktív közegben létrejön egy átmenet két energiaszint között és ennek egy $\lambda = 500,0$ nm hullámhosszú színeképvonal felel meg, melynek kiszélesedése $\Delta\lambda = 0,1$ nm. A rezonátor a $\left[\lambda - \frac{1}{2} \Delta\lambda; \lambda + \frac{1}{2} \Delta\lambda \right]$ intervallumban lehetséges hullámhosszok közül csak azokat engedi meg, amelyekre (longitudinális) állóhullámok alakulnak ki benne. Ahhoz, hogy egyetlen módot válasszunk ki (centrált módot), egy Fabry-Perot interferométert használunk. Ez az interferométer két féligáteresztő, párhuzamos síktükrökből áll, melyet a nyaláb útjába úgy helyezünk, hogy a beesés a féligáteresztő tükrökre merőleges legyen.

Fejezd ki és számítsd ki az interferométer tükrei közötti távolságot.

A következő állandók hasznosak lehetnek:

- A fény terjedési sebessége légüres térben: $c = 3,0 \cdot 10^8$ m/s;
- a Boltzmann-állandó: $k = 1,4 \cdot 10^{-23}$ J/K;
- az elemi elektromos töltés: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C;
- a Planck-állandó: $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ Js;
- a redukált Planck-állandó (há vonás): $\hbar = 1,1 \cdot 10^{-34}$ Js.

Javasolta: conf. univ. dr. **Sebastian POPESCU**

Facultatea de Fizică, Universitatea Alexandru Ioan Cuza din Iași

Válaszlap

II. Feladat: Lézer (10 pont)

A. Az aktív közeg

(a)

Analitikus eredmény	Számeredmény	Pontszám
$\frac{B_{12}}{B_{21}} =$		0,50
$\frac{A_{21}}{B_{21}} =$		0,50

(b)

Analitikus eredmény	Számeredmény	Pontszám
$A_{21} =$	$A_{21} =$	0,10 + 0,10
$B_{12} =$	$B_{12} =$	0,10 + 0,10
$B_{21} =$	$B_{21} =$	0,10 + 0,10
$T =$	$T =$	0,40 + 0,10
$N_2 =$	$N_2 =$	0,40 + 0,10

(c)

1. Az energiaszinteket és a köztük lejátszódó lehetséges átmeneteket ábrázoló vázlat/vázlatok, feltüntetve a lézerátmeneteket. 2. A lézersugárzás/sugárzások hullámhosszai 3. A pumpáló sugárzás hullámhossza/hullámhosszai	Pontszám
	1,40

B. A pumpálásra használt külső fényforrás

(d)

Analitikus eredmény	Számeredmény	Pontszám
$v_p =$	$v_p =$	0,40 + 0,10

(e)

Analitikus eredmény	Számeredmény	Pontszám
Az egyenlőség bizonyítása: $\Delta N_{\infty} = \frac{\Delta N_e}{1 + \frac{I}{I_s}}$		1,25
$I_s =$		0,25

C. Optikai rezonátor

(f)

Analitikus eredmény	Számeredmény	Pontszám
n		1,00

(g)

Analitikus eredmény	Számeredmény	Pontszám
$W(t)=$		0,40
$\tau_{relaxáció} =$		0,10

(h)

Analitikus eredmény	Számeredmény	Pontszám
$\alpha_{prag} =$	$\alpha_{prag} =$	0,40 + 0,10
$Q(\alpha_{prag}, m)=$	$Q(\alpha_{prag}, m)=$	0,40 + 0,10

(i)

Analitikus eredmény	Számeredmény	Pontszám
$t =$	$t =$	0,90 + 0,10

(j)

Analitikus eredmény	Számeredmény	Pontszám
$d =$	$d =$	0,40 + 0,10